SPRAWOZDANIE DYREKCYI

# C. K. WYŻSZEJ SZKOŁY REALNEJ

W KRAKOWIE

ZA ROK SZKOLNY 1895.

XX.

TREŚĆ.



W KRAKOWIE.
Nakładem funduszu naukowego. — W drukarni A. Koziańskiego.
1895.

SPRAWOZDANIE DYREKCYI

# C. K. WYŻSZEJ SZKOŁY REALNEJ

## W KRAKOWIE

## ZA ROK SZKOLNY 1895.



## XX.

TREŚĆ.



W KRAKOWIE.

Nakładem funduszu naukowego. — W drukarni A. Koziańskiego.

1895.

# GONIOMETRYA

przez

JANA BIDZIŃSKIEGO.

IV

# WSTĘP.

§. 1. Z planimetryi wiadomo, w jaki sposób można z danych elementów wyznaczających trójkąt, za pomocą konstrukcyi wyznaczyć niewiadome elementa. Do wyznaczenia rachunkiem tych niewiadomych elementów służą funkcye kątów.

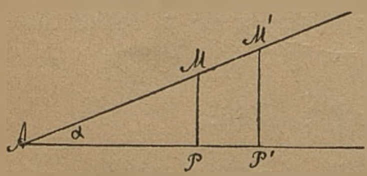
Nauka o funkcyach kątów, zwanych także funkcyami goniometrycznemi lub trygonometrycznemi, zowie się goniometryą, a zastósowanie funkcyi goniometrycznych do rozwiązywania trójkątów płaskich lub też sferycznych jest przedmiotem trygonometryi płaskiej, lub też sferycznej.

# GONIOMETRYA.

## Określenie funkcyi kątów.

§. 2. Z dowolnego punktu M (fig. 1.) położonego na jednem ramieniu kąta BAC, spuśćmy prostopadłą na drugie ramię.

fig 1




Wartości sześciu stosunków dwóch boków trójkąta AMP mianowicie:

$$\frac{MP}{AM}, \quad \frac{AP}{AM}, \quad \frac{MP}{AP}, \quad \frac{AP}{MP}, \quad \frac{AM}{AP}, \quad \frac{AM}{MP}$$

nie zależą od położenia punktu M, a więc i od długości promienia wodzącego AM (długość AM zowiemy promieniem wodzącym punktu M), albowiem z podobieństwa trójkątów AMP i AM'P' wypada:

$$\frac{MP}{AM} = \frac{M'P'}{AM'}; \quad \frac{AP}{AM} = \frac{AP'}{AM'}; \quad \text{itd.}$$

Wartości tych stosunków zależą jednak od wielkości kąta $\alpha$ i razem z tą wielkością zmieniają się; że zaś ilość zależną od drugiej ilości zowiemy funkcyą tej drugiej ilości, przeto te sześć stosunków są funkcyami kąta $\alpha$

i nazywają się kolejno: sinus (wstawa), cosinus (dostawa), tangens (styczna), cotangens (dotyczna), secans (sieczna), cosecans (dosieczna) kąta $\alpha$.

Na oznaczenie funkcyi używamy następującego znakowania:

$$\frac{MP}{AM} = \sin\alpha;\ \frac{AP}{AM} = \cos\alpha;\ \frac{MP}{AP} = \operatorname{tg}\alpha;\ \frac{AP}{MP} = \operatorname{cotg}\alpha;\ \frac{AM}{AP} = \sec\alpha;\ \frac{AM}{MP} = \operatorname{cosec}\alpha.$$

A zatem w trójkącie prostokątnym:

Wstawa kąta jest stosunkiem przyprostokątnej przeciwległej do przeciwprostokątnej.

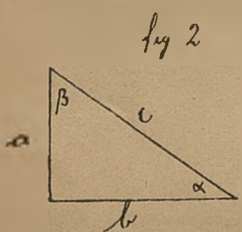
Dostawa kąta jest stosunkiem przyprostokątnej przyległej do przeciwprostokątnej.

Styczna kąta jest stosunkiem przyprostokątnej przeciwległej do przyprostokątnej drugiej.

Dotyczna kąta jest stosunkiem przyprostokątnej przyległej do przyprostokątnej drugiej.

Sieczna kąta jest stosunkiem przeciwprostokątnej do przyprostokątnej przyległej.

Dosieczna kąta jest stosunkiem przeciwprostokątnej do przyprostokątnej przeciwległej.




W trójkącie prostokątnym, którego boki są: a, b, c a kąty ostre: $\alpha$, $\beta$ (fig. 2.) jest:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\quad \cos\alpha = \frac{b}{c};\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sec\alpha = \frac{c}{b};\quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}.$$

Przykłady.

1. Obliczyć funkcye kąta $30^0$ i $60^0$.

Wykreślmy trójkąt prostokątny w którym jeden kąt ostry jest $30^0$ więc drugi $60^0$ i oznaczmy przyprostokątnię leżącą naprzeciw pierwszego kąta przez a, naprzeciw drugiego przez b, zaś przeciwprostokątnię przez c. Z uwagi, że trójkąt równoboczny o bokach c składa się z dwóch takich prostokątnych trójkątów, okaże się, że:

$$c = 2a,\ b = \sqrt{c^2 - a^2} = a\sqrt{3},\ \text{skąd:}$$

$$\sin 30^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};\quad \cos 30^0 = \frac{b}{c} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad \text{itd.}$$

$$\sin 60^0 = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2};\quad \cos 60^0 = \frac{a}{c} = \frac{1}{2};\ \text{itd.}$$

2. Obliczyć funkcye kąta $45^0$.

Oznaczmy przyprostokątnie leżące naprzeciw kąta $45^0$ przez a, zaś przeciwprostokątnię przez c, to będzie $c = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$, skąd:

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \operatorname{tg} 45^0 = \operatorname{cotg} 45^0 = \frac{a}{a} = 1;$$

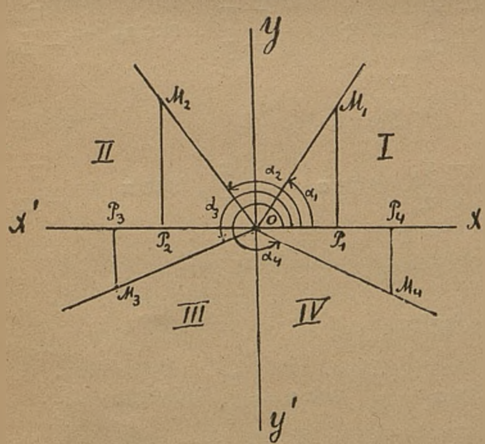
$$\sec 45^0 = \operatorname{cosec} 45^0 = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}.$$

§. 3. Pojęcie funkcyi goniometrycznych podane dla kąta ostrego, rozszerzyć można także i dla innych kątów.

W tym celu wykreślmy (fig. 3.) dwie proste wzajemnie prostopadłe, tak zwane osi spółrzędnych; jednę z nich XX' nazwijmy osią odciętych, lub osią Xów, drugą zaś YY' osią przystaw, osią rzędnych, albo osią Yów, a punkt w którym się obie osi przecinają początkiem (środkiem) spółrzędnych.

Przyjmijmy następnie kierunek dodatni i ujemny na każdej osi, mianowicie na osi Xów kierunek idący na prawo od początku spółrzędnych za dodatni, a na lewo za ujemny, zaś na osi Yów, kierunek idący w górę za dodatni, a na dół za ujemny. Wykreślmy kąt, którego wierzchołek leży w początku spółrzędnych O i którego ramię stałe schodzi się z dodatnim kierunkiem osi Xów. Jeżeli drugie ramię tego kąta obraca się w kierunku przeciwnym jak skazówka na zegarze (od dodatniego kierunku osi Xów ku dodatniemu kierunkowi osi Yów), wtenczas przebiega kolejno wszystkie cztery ćwiartki płaszczyzny: pierwszą, drugą, trzecią i czwartą, utworzone przez obie osi i z ramieniem stałem utworzy wszystkie kąty od $0^0$ do $360^0$.

fig. 3




Z któregokolwiek punktu ramienia ruchomego spuśćmy prostopadłą do osi Xów i długość mierzoną na osi Xów, zawartą między początkiem spółrzędnych a spodkiem tejże prostopadłej nazwijmy odciętą, a długość samej prostopadłej przystawą lub rzędną. ($OP_1$ jest odciętą, zaś $P_1M_1$ rzędną punktu $M_1$; $OP_2$ jest odciętą, zaś $P_2M_2$ rzędną punktu $M_2$ itd.).

Odciętą nazwijmy x, zaś rzędną y. Odcięta i rzędna zowią się spółrzędnemi punktu. Jeżeli punkt M ma spółrzędne x i y, to wtenczas piszemy: $M\begin{cases}x\\y\end{cases}$ albo M (x, y).

Odcięta jest dodatnią lub ujemną według tego, czy leży na dodatnim kierunku osi Xów czy też na ujemnym; rzędna jest dodatnią lub ujemną według tego, czy leży po dodatniej stronie osi Yów, czy też po ujemnej.

Dla kąta $\alpha_1$ którego ramię ruchome leży w ćwiartce pierwszej, krótko dla kąta w ćwiartce pierwszej, odcięta i rzędna są dodatnie ($+x_1$, $+y_1$).

Dla kąta $\alpha_2$ w ćwiartce drugiej, odcięta jest ujemną, a rzędna dodatnią ($-x_2$, $+y_2$).

Dla kąta $\alpha_3$ w ćwiartce trzeciej, odcięta i rzędna są ujemne ($-x_3$, $-y_3$).

Dla kąta $\alpha_4$ w ćwiartce czwartej, odcięta jest dodatnią, a rzędna ujemną ($+x_4$, $-y_4$).

Długość promienia wodzącego, który jest zawsze dodatni, oznaczmy przez r.

Stosując pojęcie funkcyi goniometrycznych do kąta $\alpha_1$ w trójkącie prostokątnym $OM_1P_1$ otrzymamy:

$$\sin\alpha_1 = \frac{+y_1}{r},\ \cos\alpha_1 = \frac{+x_1}{r},\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{+y_1}{+x_1},\ \operatorname{cotg}\alpha_1 = \frac{+x_1}{+y_1},\ \sec\alpha_1 = \frac{r}{+x_1},$$
$$\operatorname{cosec}\alpha_1 = \frac{r}{+y_1}$$

tj. wstawa kąta równa się stosunkowi rzędnej do promienia wodzącego; itd.

Stosując to samo do innych kątów, otrzymamy:

$$\sin\alpha_2 = \frac{+y_2}{r},\ \cos\alpha_2 = \frac{-x_2}{r},\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{+y_2}{-x_2},\ \operatorname{cotg}\alpha_2 = \frac{-x_2}{+y_2},\ \sec\alpha_2 = \frac{r}{-x_2},$$
$$\operatorname{cosec}\alpha_2 = \frac{r}{+y_2}$$

$$\sin\alpha_3 = \frac{-y_3}{r},\ \cos\alpha_3 = \frac{-x_3}{r},\ \operatorname{tg}\alpha_3 = \frac{-y_3}{-x_3},\ \operatorname{cotg}\alpha_3 = \frac{-x_3}{-y_3},\ \sec\alpha_3 = \frac{r}{-x_3},$$
$$\operatorname{cosec}\alpha_3 = \frac{r}{-y_3}$$

$$\sin\alpha_4 = \frac{-y_4}{r},\ \cos\alpha_4 = \frac{+x_4}{r},\ \operatorname{tg}\alpha_4 = \frac{-y_4}{+x_4},\ \operatorname{cotg}\alpha_4 = \frac{+x_4}{-y_4},\ \sec\alpha_4 = \frac{r}{+x_4},$$
$$\operatorname{cosec}\alpha_4 = \frac{r}{-y_4}$$

Ogólnie zatem dla jakiegokolwiek kąta:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\ \cos\alpha = \frac{x}{r},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{x}{y},\ \sec\alpha = \frac{r}{x},\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{r}{y}.$$

W tych wzorach x i y mogą być liczbami dodatniemi i ujemnemi, zaś promień r jest zawsze dodatni; wielkość jego przyjmiemy niezmienną, co można, z powodu, że funkcya kąta nie zależy od długości promienia wodzącego.

## Znaki algebraiczne funkcyi kąta i ich wielkość.

§. 4. *a*). Ponieważ w ćwiartce pierwszej x i y są dodatnie, w drugiej x jest ujemne, y dodatnie, w trzeciej x i y są ujemne, w czwartej x jest dodatnie, y ujemne, przeto: dla kąta w ćwiartce pierwszej wszystkie funkcye są dodatnie; w drugiej wstawa i dosieczna są dodatnie, a dostawa, styczna, dotyczna i sieczna ujemne; w trzeciej styczna i dotyczna są dodatnie, a wstawa, dostawa, sieczna i dosieczna ujemne; w czwartej dostawa i sieczna są dodatnie, a wstawa, styczna, dotyczna i dosieczna ujemne.

*b*) Ponieważ dla kątów $0^0$ i 360 odcięta x jest równa promieniowi r, a rzędna y równa zeru; dla kąta $90^0$, $x = o$, zaś $y = r$; dla kąta $180^0$, $x = -r$, zaś $y = o$; dla kąta $270^0$, $x = o$, zaś $y = -r$, przeto

$$\sin 0^0 = \sin 360^0 = \frac{o}{r} = o,\quad \cos 0^0 = \cos 360^0 = \frac{r}{r} = 1,\quad \operatorname{tg} 0^0 = \operatorname{tg} 360^0 = \frac{o}{r} = o,$$

$$\operatorname{cotg} 0^0 = \operatorname{cotg} 360 = \frac{r}{o} = \infty,\quad \sec 0^0 = \sec 360^0 = \frac{r}{r} = 1,$$

$$\operatorname{cosec} 0^0 = \operatorname{cosec} 360^0 = \frac{r}{o} = \infty,$$

$$\sin 90^0 = \frac{r}{r} = 1,\quad \cos 90^0 = \frac{o}{r} = o,\quad \operatorname{tg} 90^0 = \frac{r}{o} = \infty,\quad \operatorname{cotg.} 90^0 = \frac{o}{r} = o,$$

$$\sec 90^0 = \frac{r}{o} = \infty,\quad \operatorname{cosec} 90^0 = \frac{r}{r} = 1,$$

$$\sin 180^0 = \frac{o}{r} = o,\quad \cos 180^0 = \frac{-r}{r} = -1,\quad \operatorname{tg} 180^0 = \frac{o}{-r} = o,\quad \operatorname{cotg} 180^0 = \frac{-r}{o} = \infty,$$

$$\sec 180^0 = -1,\quad \operatorname{cosec} 180^0 = \infty,$$

$$\sin 270^0 = \frac{-r}{r} = -1,\quad \cos 270^0 = \frac{o}{r} = o,\quad \operatorname{tg} 270^0 = \frac{-r}{o} = \infty,\quad \operatorname{cotg} 270^0 =$$

$$= \frac{o}{r} = o,\quad \sec 270^0 = \infty,\quad \operatorname{cosec} 0 = -1.$$

*c*) Ponieważ wartość bezwględna odciętej maleje a rzędnej rośnie, gdy kąt rośnie od $0^0$ do $90^0$ i od $180^0$ do $270^0$; zaś odciętej rośnie a rzędnej maleje, gdy kąt rośnie od $90^0$ do $180^0$ i od $270^0$ do $360^0$, przeto: ze wzrostem kąta rosną wartości bezwględne wstawy, stycznej i siecznej w ćwiartkach I i III, zaś dostawy, dotycznej i dosiecznej w ćwiartkach II i IV; a maleją wartości bezwględne pierwszych funkcyi w ćwiartkach II i IV, zaś drugich w ćwiartkach I i III.

*d*) Mając na uwadze, że wartości bezwględne na x i na y są mniejsze od r i tylko dla pewnych katów równe r, tudzież że wartość bezwględna na x może być mniejszą, większą lub też równą wartości bezwględnej na y (równą dla $45^0$, $135^0$, $225^0$, $315^0$), okazuje się, że wartość bezwględna wstawy i dostawy jest $\leqq 1$, stycznej i dotycznej $\lesseqgtr 1$, siecznej i dosiecznej $\geqq 1$.

A ponieważ kazda funkcya może być dodatnią i ujemną, przeto wartość wstawy i dostawy leży między granicami — 1 i + 1, stycznej między — ∞ i + ∞, siecznej i dosiecznej między — 1 i — ∞ tudzież między + 1 i + ∞.

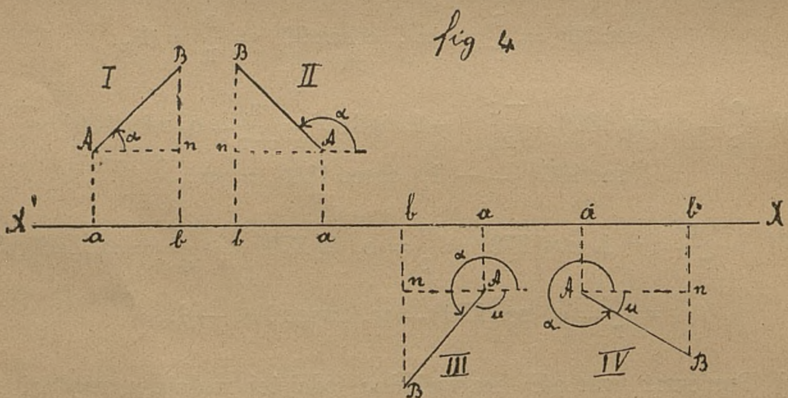
*e*) Zestawiając razem wszystko, co się powiedziało w tym paragrafie o funkcyach kątów, można oznaczyć, jak się zmienia każda funkcya, gdy kąt rośnie od 0° do 360°. Uważmy np. styczną.

Od 0° do 90° styczna jest dodatnią i otrzymuje wartości od 0 do ∞; od 90° do 180° jest ujemną i otrzymuje wartości od — ∞ do 0; od 180° do 270° jest dodatnią i otrzymuje wartości od 0 do ∞; od 270° do 360° jest ujemną i otrzymuje wartości od — ∞ do 0. (Dla kątów 90° i 270° styczna ma wartość ± ∞.

**Uwaga.** Z pojęcia dostawy można dojść do następującego twierdzenia:

Stosunek rzutu odcinka na jakąś prostą (oś rzutów) do tegoż odcinka, równa się dostawie kąta, zawartego między dodatnimi kierunkami osi rzutów i odcinka.

Uważmy (fig. 4) odcinek AB z kierunkiem dodatnim od A do B i jego rzut ab na prostą X'X' (oś rzutów); na osi tej przyjmijmy kierunek dodatni od X' ku X. Rzut ab odcinka AB jest dodatni w I i IV, zaś ujemny w II i III.




Aby znaleść wartość stosunku $\frac{ab}{AB}$, poprowadźmy przez punkt A równoległą do osi rzutów, tedy oczywiście

$$\frac{ab}{AB} = \frac{An}{AB} = \cos\alpha = \cos(x, l)$$

(x l) oznacza kąt zawarty między dodatnimi kierunkami osi Xów i odcinka AB = l.

(Za cos α w III i IV, gdzie α jest kątem wypukłym można położyć: cos (360 — α) = cos u, albowiem, jak później poznamy, cos (360 — α) = cos α.

## Kąty ujemne i ich funkcye.

§. 5. Gdyby ramię ruchome kąta obracało się około wierzchołka w kierunku ruchu skazówki zegara, t. j. od dodatniego kierunku osi Xów ku odjemnemu kierunkowi osi Yów, natenczas przebiegłoby kolejno ćwiartki IV, III, II i I.

Kąty w ten sposób powstałe, uważamy za ujemne w przeciwieństwie do kątów powstałych przez obrót w kierunku przeciwnym jak skazówka na zegarze. Pojęcie funkcyj goniometrycznych podane dla kątów, powstałych przez obrót ramienia ruchomego w kierunku przeciwnym jak skazówka na zegarze (kątów dodatnich), stosuje się także i do kątów ujemnych.

---

## Funkcye kątów większych od kąta pełnego.

§. 6. Jeżeli ramię ruchome kąta po dokonanym zupełnym obrocie, jeszcze się dalej obraca, w takim razie powstaną kąty: $360^0 + \alpha$, $2.360^0 + \alpha$, itd. ogólnie $n\,360^0 + \alpha$, gdzie n jest liczbą całkowitą.

Każda funkcya kąta $n\,360^0 + \alpha$, gdzie n oznacza liczbę całkowitą równa się równoimiennej funkcyi kąta $\alpha$, albowiem dla obu tych kątów ramię ruchome zajmuje to samo położenie. A zatem: $\sin(n.360 + \alpha) = \sin\alpha$ itd.

Np. $\sin(360^0 + 24^0) = \sin 24^0$, $\cos(360^0 - 42^0) = \cos(-42^0)$,
$\mathrm{tg}(-2.360^0 + 50^0) = \mathrm{tg}\,50^0$.

*Uwaga 1.* Często długością łuku zakreślonego promieniem równym 1, oznacza się kąt odpowiadający temu łukowi. Ponieważ w tym razie obwód koła $= 2\pi$, przeto kąt pełny oznacza się przez $2\pi$, kąt półpełny przez $\pi$, kąt $90^0$ przez $\frac{\pi}{2}$, kąt $1^0$ przez $\frac{\pi}{180}$, kąt $\alpha^0$ przez $\frac{\alpha\pi}{180}$. Zatem zamiast $n\,360^0 + \alpha$ można napisać $2\pi n + \alpha$ i w razie, gdy n jest liczbą całkowitą, będzie: $\sin(2\pi n + \alpha) = \sin\alpha$; itd.

*Uwaga 2.* Funkcye goniometryczne są funkcyami peryodycznemi kąta, albowiem otrzymują te same wartości, gdy ramię ruchome, po wykonaniu zupełnego obrotu, jeszcze się dalej obraca.

---

## Związki między funkcyami tego samego kąta.

§. 7. Z określenia funkcyi goniometrycznych:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r},\quad \cos\alpha = \frac{x}{r},\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y}{x},\quad \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{x}{y},\quad \sec\alpha = \frac{r}{x},\quad \mathrm{cosec}\,\alpha = \frac{r}{y}$$

w którem x i y oznacza odciętą i rzędną OP i MP dowolnego punktu M (fig. 3) na ramieniu ruchomem, r promień wodzący punktu M, zaś $\alpha$ kąt

między dodatnim kierunkiem osi Xów a ramieniem ruchomem, wynikają wzory następujące:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \ldots 1) \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \ldots 2) \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \ldots 3)$$

tudzież $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$; $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \dfrac{x}{y} = \operatorname{cotg}\alpha$, czyli

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ldots 4) \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ldots 5)$$

Dzieląc równanie: $x^2 + y^2 = r^2$ (które otrzymamy, stósując w $\triangle$ OMP twierdzenie Pitagorasa), kolejno przez $r^2$, $x^2$, $y^2$ dostaniemy:

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1 \qquad \text{czyli} \qquad \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \ldots 6)$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{r}{x}\right)^2 \qquad ,, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha \ldots 7)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = \left(\frac{r}{y}\right)^2 \qquad ,, \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha \ldots 8)$$

We wzorach tych dla krótkości napisano: $\cos^2\alpha$, $\sin^2\alpha$ itd., zamiast: $(\cos\alpha)^2$, $(\sin\alpha)^2$, itd.

§. 8. Na podstawie wzorów w §. 7. możemy, znając jednę funkcyę jakiegoś kąta, znaleść wszystkie inne funkcye tegoż kąta.

I tak, znając $\sin\alpha$, znajdziemy:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{-1\sin^2\alpha}}; \quad \operatorname{cotg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}; \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

Znając $\operatorname{tg}\alpha$, znajdzie się:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}}} = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}; \quad \sec\alpha = \pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2\alpha} = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Z dwóch znaków $\pm$ stojących przed pierwiastkiem tylko jeden wziąć należy, a który pozna się, mając na uwadze znak każdej z osobna funkcyi.

## Przykłady:

1). Wyrazić wszystkie funkcye przez cosec $\alpha$, przyjmując, że $\alpha$ jest kątem w ćwiartce IV.

Ponieważ w ćwiartce IV *cosinus* i *secans* są dodatnie, a inne funkcye ujemne, będzie:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}; \quad \cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = +\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 \alpha}} = -\frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{cosec} \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}; \quad \operatorname{cotg} \alpha = -\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}; \quad \sec \alpha = -\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}.$$

Wiedząc np. że $\operatorname{cosec} 330^0 = -2$, otrzymamy:

$$\sin 330 = -\frac{1}{2}; \quad \cos 330^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \operatorname{tg} 330^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \operatorname{cotg} 330^0 = -\sqrt{3};$$

$$\sec 330^0 = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

2). Znaleść wszystkie funkcye, wiedząc, że $\operatorname{tg} 135^0 = -1$.

Dla kąta w ćwiartce II. *sinus* i *cosecans* są dodatne, a inne funkcye ujemne, będzie zatem:

$$\sin 135 = -\frac{\operatorname{tg} 135^0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 135^0}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 135^0 = \frac{\operatorname{tg} 135^0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 135^0}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \operatorname{cotg} 135^0 = -1; \quad \sec 135^0 = -\sqrt{2};$$

$$\operatorname{cosec} 135^0 = \sqrt{2}.$$

3). $\operatorname{Sec} \alpha = -2$. Znaleść wszystkie inne funkcye:

Będzie: $$\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{\sec^2 \alpha}} = \pm\frac{\sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2};$$

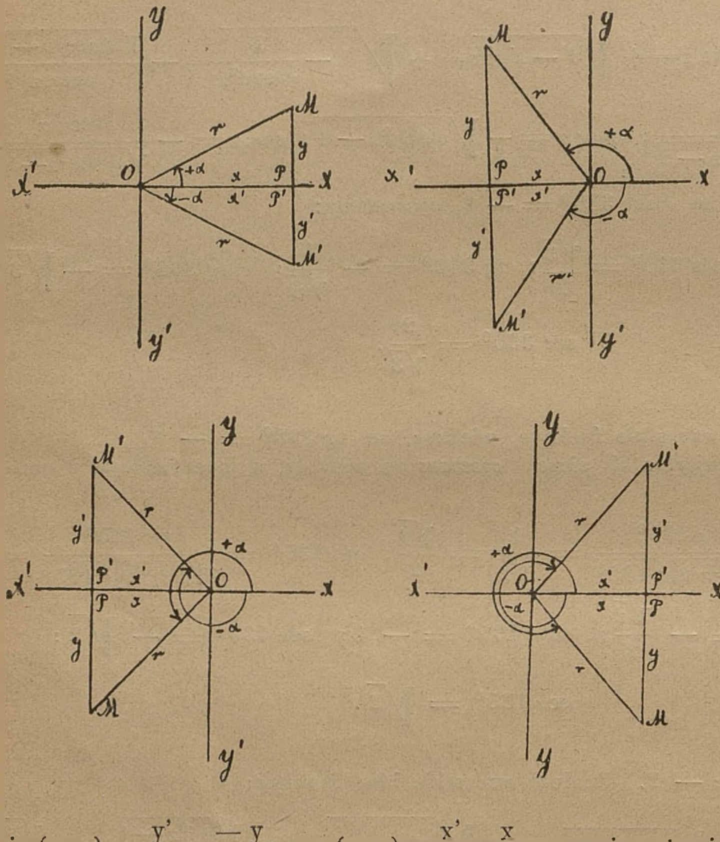
$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = -\frac{1}{2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \mp\sqrt{3}; \quad \operatorname{cotg} \alpha = \mp\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Do funkcyi $\sec \alpha = -2$ należą dwa kąty, z których jeden leży w ćwiartce II, a drugi w ćwiartce III. Dla pierwszego kąta *sinus* i *cosecans* są dodatne, a inne funkcye ujemne, zaś dla drugiego kąta *tangens* i *catangens* są dodatnie, a inne ujemne. Zatem dla pierwszego kąta należy przed pierwiastkiem wziąć górny znak, dla drugiego dolny.

## Związki między funkcyami dodatnich i ujemnych kątów, tj. kątów: $+\alpha$ i $-\alpha$.

*fig. 5.*



§. 9. Wykreślmy kąt XOM $= \alpha$ i kąt XOM' $= -\alpha$ (fig. 5). Promień wodzący dla obu kątów przyjmijmy jednakowy i oznaczmy spółrzędne punktu M przez x i y, zaś spółrzędne punktu M' przez x' i y'. Ponieważ $\triangle$ OMP $\cong \triangle$ OM'P', a rzędne y i y' są przeciwnego, zaś odcięte x i x' jednakowego znaku, przeto $x' = x$; $y' = -y$; będzie zatem:

$$\sin(-\alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{-y}{r};\ \cos(-\alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{x}{r},\ \text{a ponieważ: } \sin\alpha = \frac{y}{r};\ \cos\alpha = \frac{x}{r};$$

przeto:

$$\left.\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) &= \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{cotg}(-\alpha) &= -\operatorname{cotg}\alpha \end{aligned}\right| \quad \ldots 9)$$

Uwaga: Wzory $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$ można wyprowadzić wprost z figury.

**Przykłady:**

1). $\sin(-72^0) = -\sin 72^0$.

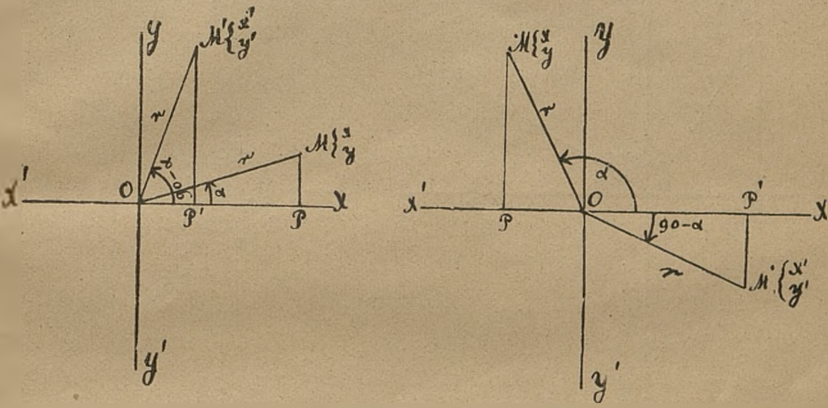
2) $\cos(360^0 - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

3). $\sin(360^0 - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.

## Związki między funkcyami kątów dopełniających, tj kątów $\alpha$ i $(90 - \alpha)$.

§. 10. Wykreślmy kąt XOM $= \alpha$ i kąt XOM' $= 90 - \alpha$. (fig. 6). Promień wodzący dla obu kątów przyjmijmy jednakowy i oznaczmy spółrzędne punktu M przez x i y, zaś spółrzędne punktu M' przez x' i y'.

fig. 6.




Z przystawania trójkątów OMP i OM'P', tudzież z uwagi na znaki spółrzędnych punktów M i M' wynika, że: $x' = y$, $y' = x$.

Że zaś:

$$\sin(90-\alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r};\quad \cos(90-\alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r};\quad \sin\alpha = \frac{y}{r};\quad \cos\alpha = \frac{x}{r};$$

przeto:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\ (90 - \alpha) &= \cos\alpha \\
\cos\ (90 - \alpha) &= \sin\alpha, \quad \text{zatem także:} \\
\operatorname{tg}\ (90 - \alpha) &= \operatorname{cotg}\alpha \\
\operatorname{cotg}\ (90 - \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \\
\sec\ (90 - \alpha) &= \operatorname{cosec}\alpha \\
\operatorname{cosec}(90 - \alpha) &= \sec\alpha
\end{aligned}\right| \quad \ldots\ 10)$$

Uwaga: Widzimy z tego, że wstawa, styczna i sieczna dopełnienia kąta danego (kąt dany $= \alpha$, dopełnienie kąta danego $= 90 - \alpha$) równa się dostawie, dotycznej i dosiecznej kąta danego, i naodwrót.

Nazwa: *dostawa. dotyczna i dosieczna* są skróceniami za: *dopełnienia wstawa, dopełnienia styczna, dopełnienia sieczna.* Podobnie nazwy: *cosinus, cotangens, cosecans* są skróceniem za: *complementi (dopełnienia) sinus, complementi tangens, complementi secans.* Również, czasem używana, nazwa: *kofunkcya* jest skróceniem za: *complementi funkcya.* Kofunkcyą wstawy jest dostawa, dostawy wstawa, itd.

Wprowadzając nazwę kofunkcya, możemy wzory 10) wysłowić w sposób następujący:

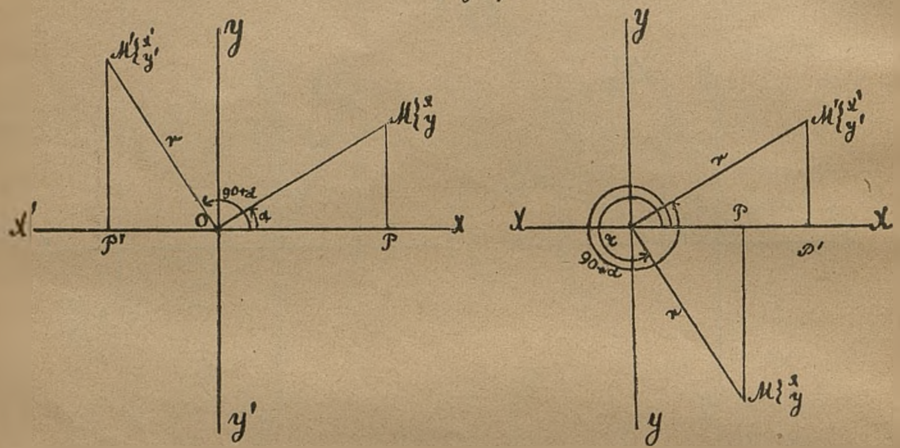
**Funkcya kąta równa się kofunkcyi kąta dopełniającego.**

Ćwiczenie: Wyprowadzić wzory 10) w przypadku, gdy $\alpha$ jest kątem wypukłym.

## Związki między funkcyami kątów $\alpha$ i $(90+\alpha)$.

§. 11. Wykreślmy kąt XOM $=\alpha$ i kąt XOM' $= 90+\alpha$. (fig. 7). Promień wodzący dla obu kątów przyjmijmy jednakowy i oznaczmy spółrzędne punktu M przez x i y, a spółrzędne punktu M' przez x' i y'. Z przystawa-

fig. 7.




nia trójkątów OMP i OM'P' i z uwagi na znaki spółrzędnych punktów M i M' wynika, że $x' = -y$; $y' = x$.

Że zaś $\sin(90+\alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r}$; $\cos(90+\alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{-y}{r}$; $\sin\alpha = \frac{y}{r}$; $\cos\alpha = \frac{x}{r}$

przeto:

$$\left.\begin{aligned} \sin(90+\alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90+\alpha) &= -\sin\alpha \\ \operatorname{tg}(90+\alpha) &= -\operatorname{cotg}\alpha \\ \operatorname{cotg}(90+\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots 11)$$

Ćwiczenie. Wyprowadzić wzory 11) w przypadku, gdy $\alpha$ jest kątem rozwartym i gdy jest wypukłym a mniejszym od $270^0$.

---

## Związki między funkcyami kątów spełniających, tj. kątów $\alpha$ i $(180-\alpha)$.

§. 12. W podobny sposób, jak w poprzedzających paragrafach, dojdziemy do wzorów:

$$\left.\begin{aligned} \sin(180-\alpha) &= \sin\alpha; & \operatorname{tg}(180-\alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \\ \cos(180-\alpha) &= -\cos\alpha; & \operatorname{cotg}(180-\alpha) &= -\operatorname{cotg}\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots 12)$$

Ćwiczenie. Wyprowadzić wzory: a) $\sin(180+\alpha) = -\sin\alpha$; b) $\sin(360-\alpha) = -\sin\alpha$; c) $\cos(360-\alpha) = \cos\alpha$; d) $\operatorname{tg}(180+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$; e) $\operatorname{cotg}(180+\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$.

§. 13. Za pomocą wzorów 9., 10., 11. i 12. tudzież tego, że funkcya kąta n $360^0 + \alpha$, gdzie n oznacza liczbę całkowitą, równa się równoimiennej funkcyi kąta $\alpha$, możemy funkcyę jakiegokolwiek kąta wyrazić przez funkcyę kąta ostrego, a nawet mniejszego od $45^0$. Np.:

$\sin 104^0 = \sin(90^0 + 14^0) = \cos 14^0$ albo $\sin 104^0 = \sin(180 - 76^0) =$
$= \sin 76^0 = \cos 14^0$;

$\cos 408^0 = \cos(360^0 + 48^0) = \cos 48^0 = \sin 42^0$;

$\operatorname{tg} 152^0 = \operatorname{tg}(90^0 + 62^0) = - \operatorname{cotg} 62^0 = - \operatorname{tg} 28^0$, albo

$\operatorname{tg} 152^0 = \operatorname{tg}(180^0 - 28^0) = - \operatorname{tg} 28^0$;

$\operatorname{cotg} 253^0 = \operatorname{cotg}(360^0 - 107^0) = \operatorname{cotg}(-107^0) = - \operatorname{cotg} 107^0 = -$
$= - \operatorname{cotg}(90^0 + 17^0) = \operatorname{tg} 17^0$.

---

## Funkcye sumy i różnicy dwóch kątów.

§. 14. Oznaczmy kąty xou i uop odpowiednio przez $\alpha$ i $\beta$. (fig. 8 i 9). Ramię Ou jest spólne obu kątom. Z punktu M dowolnie obranego na ramieniu Op spuśćmy prostopadłą MP na oś Ox i prostopadłą MK na oś Ou i wreszcie z punktu K prostopadłą KL na oś Xów, tj. wyrysujmy spółrzędne dla kątów $(\alpha + \beta)$ względnie $(\alpha - \beta)$, tudzież dla kątów $\beta$ i $\alpha$.

fig 8.

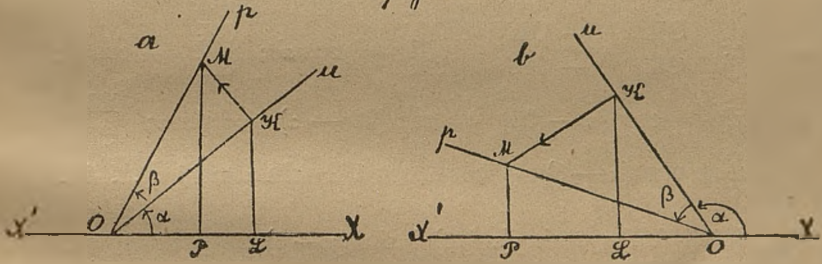


fig 9.

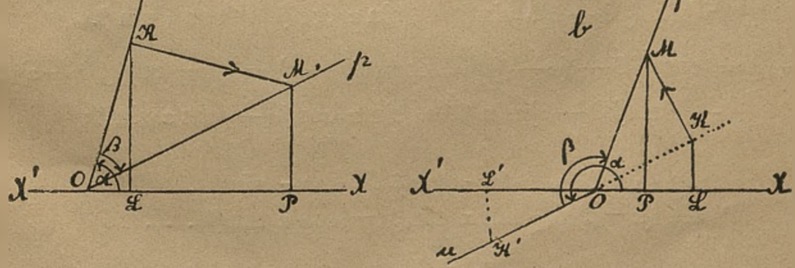


Figura 8) odnosi się do sumy kątów i to: a) gdy oba kąty są ostre, b) gdy $\alpha$ jest kątem rozwartym, $\beta$ ostrym; zaś figura 9) odnosi się do różnicy kątów i to: a) gdy oba kąty są ostre, b) gdy $\alpha$ jest kątem wypukłym, $\beta$ rozwartym. (Strzałka na odcinku KM wskazuje dodatni kierunek).

Dla figury 8) będzie:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{OP}{OM} = \frac{OL+LP}{OM} = \frac{OL}{OM} + \frac{LP}{OM} = \frac{OL}{OK} \cdot \frac{OK}{OM} + \frac{LP}{KM} \cdot \frac{KM}{OM}$$

że zaś: $\frac{OL}{OK} = \cos\alpha,\ \frac{OK}{OM} = \cos\beta,\ \frac{KM}{OM} = \sin\beta;$

zaś stósownie do uwagi w §. 4.

$$\frac{KP}{KM} = \cos(xl)$$

Kąt (xl) zawarty między dodatnimi kierunkami osi x i rzędnej (odcinka) KM = l równa się: $90+\alpha$.

zatem $\frac{LP}{KM} = \cos(xl) = \cos(90+\alpha) = -\sin\alpha$

przeto: $\mathbf{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha.\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta}$ . . . 13).

Dla figury 9) będzie:

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{OP}{OM} = \frac{OL+LP}{OM} = \frac{OL}{OM} + \frac{LP}{OM} = \frac{OL}{OK} \cdot \frac{OK}{OM} + \frac{LP}{KM} \cdot \frac{KM}{OM},$$

że zaś $\frac{OL}{OK} = \cos\alpha$ (w fig. b), w której prosta MK przecina oś u po stronie ujemnej, obierając punkty L' i K' tak, by OL' = — OL, OK' = — OK,

będzie: $\frac{OL}{OK} = \frac{-OL'}{-OK'} = \frac{OL'}{OK'} = \cos\alpha);\ \frac{OK}{OM} = \cos\beta;$

$\frac{LP}{KM} = \cos(xl) = \cos(\alpha-90) = \cos(90-\alpha) = \sin\alpha;\ \frac{KM}{OM} = \sin\beta;$

przeto $\mathbf{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \sin\alpha\ \sin\beta}$ . . . 14.

§. 15. Jeżeli funkcye $\sin(\alpha+\beta)$ i $\sin(\alpha-\beta)$ za pomocą wzorów 10.) przemienimy na funkcye *cosinus*, a następnie do nich zastósujemy wzory 12) i 13), otrzymamy:

$$\sin(\alpha+\beta) = \cos\{90-(\alpha+\beta)\} = \cos\{(90-\alpha)-\beta\} = \cos(90-\alpha).\cos\beta +$$
$$+\sin(90-\alpha).\ \sin\beta = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta.$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \cos\{90-(\alpha-\beta)\} = \cos\{(90-\alpha)+\beta\} = \cos(90-\alpha)\cos\beta -$$
$$-\sin(90-\alpha)\sin\beta = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta;$$

zatem

$$\mathbf{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta} \quad . . . 15)$$
$$\mathbf{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \sin\beta} \quad . . . 16)$$

§. 16. Z ostatnich czterech wzorów wynika, że:

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)} = \frac{\sin\alpha\ \cos\beta \pm \cos\alpha\ \sin\beta}{\cos\alpha\ \cos\beta \mp \sin\alpha\ \sin\beta};$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\cos(\alpha \pm \beta)}{\sin(\alpha \pm \beta)} = \frac{\cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta}{\sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta}$$

dzieląc zaś liczniki i mianowniki ostatnich ułamków w pierwszem równaniu przez $\cos\alpha \cos\beta$, a w drugiem przez $\sin\alpha \sin\beta$, otrzymamy:

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}; \quad \operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \mp 1}{\operatorname{cotg}\beta \mp \operatorname{cotg}\alpha}$$

Uwaga. Za pomocą wzorów 13.) 14.) 15.) i 16.) możemy tak samo, jak za pomocą wzorów 9—11. (patrz §. 13.) funkcyę jakiegokolwiek kąta wyrazić przez funkcyę kąta ostrego. Np.

$$\sin 104^0 = \sin(90^0 + 14^0) = \sin 90^0 \cos 14^0 + \cos 90^0 \sin 14^0 = \cos 14^0$$
$$(\text{bo } \sin 90^0 = 1, \quad \cos 90^0 = 0)$$

$$\operatorname{cotg} 253^0 = \frac{\cos 253^0}{\sin 253^0} = \frac{\cos(270^0 - 17^0)}{\sin(270^0 - 17^0)} = \frac{\cos 270^0 \cos 17^0 + \sin 270^0 \sin 17^0}{\sin 270^0 \cos 17^0 - \cos 270^0 \sin 17^0} =$$
$$= \frac{-\sin 17^0}{-\cos 17^0} = \operatorname{tg} 17^0 \quad (\text{bo } \sin 270^0 = -1, \quad \cos 270^0 = 0).$$

§. 17. Jeżeli we wzorach 12.) i 14.) położymy $\beta = \alpha$, otrzymamy:

$$\mathbf{\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha} \quad \ldots \; 17)$$
$$\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \quad \ldots \; 18)$$

Za pomocą tych równań oblicza się funkcye kąta podwójnego, znając funkcye kąta pojedynczego.

§. 18. Jeżeli równania 6.) i 18.) kładąc w nich $\frac{\alpha}{2}$ za $\alpha$ tj. równania:

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$ dodamy do siebie,

a następnie odejmiemy, otrzymamy:

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

skąd znowu wypadną równania:

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}; \quad \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} \end{aligned}\right| \quad \ldots \; 19)$$

Za pomocą tych równań możemy, znając dostawę kąta, obliczyć funkcyə goniometryczne połowy tego kąta.

Gdy $\alpha$ leży między $0^0$ i $180^0$, wtenczas wszystkie funkcye kąta $\frac{\alpha}{2}$ są dodatnie, gdy zaś $\alpha$ leży między $180^0$ i $360^0$, wtenczas $\sin\frac{\alpha}{2}$ jest dodatnie, a $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ są ujemne.

## Zamiana sum i różnic funkcyi goniometrycznych na iloczyn.

§. 19. Z pomocą równań 12), 13), 14) i 15) możemy sumę i różnicę funkcyi goniometrycznych zamienić na iloczyn.

a) Gdy idzie o zamianę na iloczyny wyrażeń:

$$\sin\alpha + \sin\beta\,,\quad \sin\alpha - \sin\beta\,,\quad \cos\alpha + \cos\beta\,,\quad \cos\alpha - \cos\beta\,;$$

połóżmy: $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$, następnie każdą z funkcyi rozwińmy według podanych wzorów, a w końcu po wykonaniu redukcyi, podstawmy wartości za x i za y, mianowicie (ponieważ: $\alpha + \beta = 2x$, $\alpha - \beta = 2y$):

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2},\quad y = \frac{\alpha-\beta}{2},$$ a otrzymamy:

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y + $$
$$+ \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

itd. W ten sposób dochodzimy do wzorów:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\quad \ldots\ 20)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\quad \ldots\ 21)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\quad \ldots\ 22)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -\,2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\quad \ldots\ 23)$$

b) Przyjmując $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$, otrzymamy w tym przypadku:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\alpha+\beta) = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} +$$
$$+ 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left\{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right\} =$$
$$= 4\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{2\alpha}{4}\,.\,\cos\frac{-2\beta}{4} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\,.$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4} + \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\left\{\cos\frac{\alpha-\beta}{4} +\right.$$
$$\left. + \sin\frac{\alpha+\beta}{4}\right\} = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\left\{\cos\frac{\alpha-\beta}{4} + \cos\frac{360-\alpha-\beta}{4}\right\} =$$
$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{360-2\beta}{8}\cos\frac{-360+2\alpha}{8} =$$
$$4\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{180-\beta}{4}\cos\frac{180-\alpha}{4} = 4\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha+\gamma}{4}\cos\frac{\beta+\gamma}{4}\,.$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}-\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)}\left\{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta\right\}=$$

$$=-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\left\{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right\}=$$

$$=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\left\{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right\}=$$

$$=\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}.$$

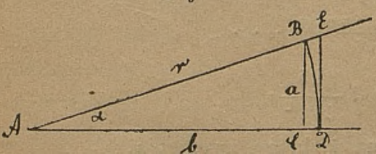
---

## Obliczenie wartości funkcyi goniometrycznych.

§. 20. Obliczmy najpierw wstawę kąta bardzo małego, zatem sin 1' i wstawy kątów mniejszych od 1'.

Z punktu B gdziekolwiek obranego na jednem ramieniu kąta (fig. 10) spuśćmy prostopadłą BC na drugie ramię i równocześnie z wierzchołka tego kąta zakreślmy łuk BD.

fig 10




Z trójkąta prostokątnego ABC, którego boki są: a, b, r wypada:

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{r},$$

że zaś kąt $\alpha$ jest bardzo małym, przeto prostopadła BC tylko bardzo mało różni się od łuku BD $= l$, tak że położyć można:

$$\sin\alpha=\frac{l}{r}$$

kładąc zaś za $l$ wartość z równania: $l : 2r\pi = \alpha : 360^0$, otrzymamy:

$$\sin\alpha=\frac{\pi\alpha}{180^0}=\operatorname{arc}\alpha$$

zatem:

$$\sin 1' = \frac{\pi . 1'}{180^0} = \frac{\pi . 1'}{180 . 60'} = \frac{\pi}{10800} = 0{\cdot}0002908882 \ldots$$

$$\sin 1'' = \frac{\pi . 1''}{180^0} = \frac{\pi}{180. 60. 60} = \frac{\sin 1'}{60} = 0{\cdot}0000048481 \ldots$$

$$\sin 2'' = \frac{\pi . 2''}{180^0} = 2 \sin 1''$$

$$\sin 3'' = 3 \sin 1''$$

itd.

Uwaga. Zobaczmy jaki błąd popełniamy, jeżeli przy kącie bardzo małym zastąpimy a przez ł, czyli, jeżeli przyjmiemy:

$$\sin \alpha = \frac{\pi \alpha}{180^0} = \operatorname{arc} \alpha.$$

Ponieważ $\widehat{BD} < DE$ (co się okazuje z uwagi, że wycinek ABD ma mniejszą powierzchnię, aniżeli trójkąt ABE, tj. $\frac{r. \widehat{BD}}{2} < \frac{r. DE}{2}$), zatem $\frac{\widehat{BD}}{r} < \frac{DE}{r}$, czyli

$$\operatorname{arc} \alpha < \operatorname{tg} \alpha.$$

Kładąc w tej nierówności $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}$, otrzymamy:

$$\operatorname{arc} \alpha \sqrt{1 - \sin^2\alpha} < \sin \alpha.$$

Że zaś $1 - \sin^2\alpha < 1$, przeto $1 - \sin^2\alpha < \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, zatem:

$$\operatorname{arc} \alpha \ (1 - \sin^2\alpha) < \sin \alpha.$$

A że $a < ł$, skąd $\frac{a}{r} < \frac{ł}{r}$ czyli $\sin \alpha < \operatorname{arc} \alpha$, więc także:

$$\operatorname{arc} \alpha \ (1 - \operatorname{arc}^2\alpha) < \sin \alpha;$$

czyli:

$$\operatorname{arc} \alpha - \sin \alpha < \operatorname{arc}^3\alpha$$

przeto:

$$\operatorname{arc} 1' - \sin 1' < \operatorname{arc}^3 1'$$

ale:

$$\operatorname{arc} 1' = 0{\cdot}0002908 \ldots$$

$$\operatorname{arc}^3 1' = 0{\cdot}000000000024 \ldots$$

Zatem, jeżeli przyjmiemy:

$$\sin 1' = \frac{\pi . 1'}{180^0} = 0{\cdot}0002908 \ldots$$

wtenczas popełnimy błąd, który jeśli mniejszy od $\frac{25}{10^{12}}$.

Błąd taki w praktycznym rachunku nie ma żadnego znaczenia.

§. 21. Znając funkcye 1', znajdziemy funkcye 2', 3', 4' . . . stósując wzór 12) i tak:

$$\sin 2' = 2 \sin 1' \cos 1'$$

$$\sin 3' = \sin (2' + 1') = \sin 2' \cos 1' + \cos 2' \sin 1'$$

itd.

Funkcye należy obliczyć tylko do 45°, albowiem funkcyę jakiegokolwiek kąta, możemy wyrazić przez funkcyę kąta mniejszego od 45°.

Funkcye goniometryczne są w ogólności liczbami niewymiernemi. Tylko dla niektórych kątów, funkcye i to nie wszystkie są liczbami wymiernemi, jak np. dla kąta 30° funkcye: *sinus* i *cosecans*, albo dla kąta 45°: *tangens* i *cotangens*, lub dla kąta 60°: *cosinus* i *secans*.

---

## Tablice logarytmów funkcyi trygonometrycznych.

§. 22. Ponieważ rachunki liczebne przy użyciu logarytmów bardzo się upraszczają, przeto w praktyce używamy logarytmów funkcyj trygonometrycznych, zamiast samych funkcyj. Stąd też w tablicach trygonometrycznych podane są logarytmy funkcyi kątów od 0° do 90° i to funkcyi: *sinus*, *cosinus*, *tangens* i *cotangens*. Funkcyi *secans* i *cosecans* w rachunku się nie używa.

Za pomocą takich tablic możemy:

a) Znaleść logarytm pewnej funkcyi trygonometrycznej, odpowiadający danemu kątowi (mniejszemu od 90°).

b) Znaleść kąt, odpowiadający danemu logarytmowi pewnej funkcyi trygonometrycznej.

Ponieważ wstawa i dostawa kątów od 0° do 90°, styczna od 0° do 45°, a dotyczna od 45° do 90° są mniejsze od jedności, przeto logarytmy tych fenkcyj dla kątów tu podanych są ujemne. Dla dogodności, logarytmy wszystkich tych kątów sprowadzone są do cechy: (— 10), a w tablicach Adama (o których niżej mówić będziemy), także i logarytmy stycznej dla kątów większych od 45° i logarytmy dotycznej dla kątów mniejszych od 45°. Cecha ta: (— 10) w tablicach podana nie jest, więc przy szukaniu logarytmów pamiętać o niej należy.

Tablice Adama są pięciocyfrowe i obejmują logarytmy funkcyi: sinus, cosinus, secans i cosecans kątów rosnących co każdą minutę od: 0° do 2° i od: 88° do 90°, a co każde dwie minuty od: 2° do 88°.

Przy kącie mniejszym od 45°, stopnie podane są u góry, a minuty z lewej strony; zaś przy kącie większym od 45° stopnie u dołu, a minuty z prawej strony. Przy pierwszym kącie nazwa logarytmu funkcyi podana jest u góry, przy drugim u dołu w czterech kolumnach (log sin, log cos, log tg, log cotg). Jakakolwiek liczba w jednej z tych kolumn jest logarytmem funkcyi wypisanej u góry tejże kolumny dla kąta, którego stopnie są u góry, a minuty na tym samym wierszu z lewej strony, a także jest logarytmem funkcyi wypisanej u dołu tejże kolumny dla kąta, którego stopnie są u dołu, a minuty na tym samym wierszu z prawej strony.

I tak np. na str. 51 znajdziemy, że:

a) log cotg 78° 16' = 9·31743 — 10;

b) w kolumnie zaznaczonej u góry przez: log cos, a u dołu przez: log sin

liczba 9·99135 — 10

przedstawia: log cos 11° 24', tudzież: log sin 78° 36'.

W tablicach tych podane są nadto logarytmy funkcyi: sinus i tangens kątów mniejszych od 6', a rosnących co każdą sekundę, tudzież logarytmy funkcyi: cosinus i cotangens kątów większych od 89° 54', także rosnących co sekundę. Dla pierwszych kątów log sin i log tg są między sobą równe; dla drugich log cos i log cotg.

Możemy teraz rozwiązać dwa zadania, podane na początku tego paragrafu.

Zadanie 1.

**Znaleść logarytm pewnej funkcyi trygonometrycznej, odpowiadającej danemu kątowi.**

Gdy kąt jest mniejszy od 45°, to stopni i nazwy logarytmu funkcyi szukamy u góry, a minut z lewej strony; gdy zaś kąt jest większy od 45°, to stopni i nazwy logarytmu funkcyi szukamy u dołu, a minut z prawej strony.

Jeżeli dany kąt znajduje się dokładnie w tablicach (gdy zawiera: stopnie i parzystą ilość minut, a przy kącie mniejszym od 2° lub większym od 88°: stopnie i minuty) wtenczas odpowiadający logarytm wypisujemy wprost z tablic, według skazówki podanej wyżej w tym paragrafie.

Jeżeli zaś dany kąt nie znajduje się dokładnie w tablicach (gdy zawiera nieparzystą ilość minut przy kącie większym od 2° a mniejszym od 88°, albo gdy zawiera jeszcze i sekundy), wtenczas wypisujemy z tablic logarytm dla kąta bezpośrednio mniejszego a znajdującego się w tablicach, następnie dla pozostałych sekund lub też minut i sekund robimy poprawkę i tę (z opuszczeniem cyfer dziesiętnych) do znalezionego już logarytmu dodajemy przy funkcyach, które ze wzrostem kąta rosną tj. przy wstawie i stycznej, a od znalezionego logarytmu odejmujemy przy funkcyach, które ze wzrostem kąta maleją tj. przy dostawie i dotycznej.

Poprawkę, którą nazwijmy x, znajdziemy w ten sposób. Przypuśćmy, że do 1" należy różnica logarytmów d (różnica ta podana jest w kolumnie: D. 1" i znajduje się między kątem bezpośrednio mniejszym i bezpośrednio większym od danego), zaś do pozostałych $\alpha$" różnica x, tj.

$$1'' \; . \; . \; . \; . \; . \; d$$
$$\alpha'' \; . \; . \; . \; . \; . \; x$$

to oczywiście poprawka $x = d\alpha$, co zresztą wypada z proporcyi: $x : d = \alpha : 1$.

Kolumna oznaczona przez: c. d. 1" podaje wspólne różnice dla log tg i log cotg.

Przykład:

Dany jest kąt 78° 13' 27"; znaleść: log sin, log cos, log tg i log cotg tego kąta.

a) log sin 78° 12' = 9·99072 — 10.
D. 1" = 0·05 : zatem poprawka dla 1'27" czyli dla 87" jest = 87.0 05 = 4·35 czyli = 4; poprawkę tę należy dodać, zatem:
log sin 78° 13' 27" = 9·99076 — 10.

b) log cos 78° 12' = 9·31068 — 10.
D. 1" = 1·01 ; poprawka dla 87" jest 87.1·01 = 87·78 = 88 ; poprawkę tę należy odjąć, zatem:
log cos 78° 13' 27" = 9·30980 — 10.

Zwyczajnie logarytm funkcyi kąta bozpośrednio mniejszego pisze się na boku i tam też oblicza się poprawkę.

c) log tg 78⁰ 13' 27" = 10·68095 — 10 68004} +
91}

D. 1" . . . 1·05
1·05.87 = 91·35 = 91

d) log ctg 78⁰ 13' 27" = 9·31905 — 10 31996} —
91}

1" = 1·05
87" . . . . x
x : 1·05 = 87 : 1
x = 87.1·05 = 91

Zadanie 2.

**Znaleść kąt, odpowiadający danemu logarytmowi pewnej funkcyi trygonometrycznej.**

Jeżeli logarytm funkcyi znajduje się dokładnie w tablicach, wtenczas stopnie wypisujemy z góry, a minuty z tego samego wiersza z lewej strony, albo stopnie z dołu a minuty z prawej strony podług tego, czy nazwa funkcyi jest u góry kolumny, czy też u dołu.

Jeżeli zaś logarytm funkcyi nie znajduje się dokładnie w tablicach, wtenczas dla logarytmu bezpośrednio mniejszego wypisujemy odpowiedni kąt, a następnie robimy poprawkę i tę do wypisanego już kąta przy wstawie i stycznej dodajemy, a przy dostawie i dotycznej odejmujemy.

Poprawkę robi się w ten sposób. Niech d oznacza różnicę logarytmów należącą do 1", zaś r różnicę między danym logarytmem, a logarytmem bezpośrednio mniejszym znajdującym się w tablicach, należącą do x", tj.

d . . . 1"
r . . . x"

to oczywiście poprawka $x = \frac{r}{d}$, co zresztą wypada z proporcyi: x : 1 = r : d

Przykłady:

a) **log sin α = 9·83881 — 10.**

Bezpośrednio mniejszy logarytm jest 9 83861 — 10; do niego należy kąt 43⁰ 36'; różnica między danym logarytmem, a bezpośrednio mniejszym jest 20, a różnica dla 1" jest 0·22, więc poprawka = 20 : 0 22 = 90·9" = 91" = 1 31"

Poprąwkę tę należy dodać, zatem:

$$\alpha = \mathbf{43^0\ 37'\ 31''}$$

Zwyczajnie pisze się tak:

log sin α = 9·83881 — 10
861
poprawka = 20 : 0·22 = 90·9" = 1' 31" bo
1" . . . . 0·22
x" . . . . . 20
x : 1 = 20 : 0·22

α = 43⁰ 36' }
+ 1' 31" }
α = 43⁰ 37' 31"

b) **log cotg $\alpha$ = 9·68167 — 10**

$$\begin{array}{l} \phantom{9·68}109 \\ \hline \phantom{9·68}58 : 0·54 = 107·4'' = 1'\ 47'' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \alpha = 64^0\ 22' \\ \phantom{\alpha =}—\ \ 1'\ 47'' \\ \hline \alpha = 64^0\ 20'\ 13'' \end{array}$$

§. 23. Rozwiążmy jeszcze dwa następujące ćwiczenia.

**Ćwiczenie 1.** Dany jest kąt, znaleść wartość funkcyi goniometrycznej, odpowiadającą temu kątowi.

Gdy kąt jest mniejszy od $90^0$, wtenczas szukamy najpierw logarytmu funkcyi tego kąta, a następnie liczby odpowiadającej temu logarytmowi; liczba ta będzie szukaną funkcyą.

Gdy kąt jest większy od $90^0$, wtenczas funkcyę tego kąta wyrażamy najpierw przez funkcyę kąta mniejszego od $90^0$, a potem postępujemy jak wyżej.

Przykłady:

a) **Obliczyć: tg $25^0\ 13'\ 26''$**

log tg $25^0\ 13'\ 26''$ = 9·67308 — 10

tg $25^0\ 13'\ 26''$ = num log 0·67308 — 1 = 0·47107

b) **Obliczyć: cos $153^0\ 12'$**

cos $153^0\ 12'$ = cos $(180^0 — 26'\ 48)$ = — cos $26^0 48'$

log cos $26^0\ 48'$ = 9·95065 — 10

cos $26^0\ 48'$ = num log 0·95065 — 1 = 0·89258

przeto:

cos $153^0\ 12'$ = — 0·89258.

**Ćwiczenie 2.** Znaleść kąt należący do pewnej funkcyi trygonometrycznej.

Do każdej funkcyi należą dwa kąty mniejsze od $360^0$. Najczęściej idzie nam tylko o kąty wklęsłe.

a) Gdy funkcya jest dodatną, wtenczas z dwóch do niej należących kątów jeden jest ostry, drugi większy od $90^0$. Ten drugi kąt przy funkcyi sinus jest wklęsłym i razem z pierwszym czyni $180^0$, zaś przy pozostałych funkcyach (cosinus, tangens i cotangens) jest wypukłym i leży przy cosinusie w ćwiartce IV, a przy tangensie i cotangensie w ćwiartce III.

Kąt ostry wynajdziemy, logarytmując daną funkcyę.

Drugi kąt wklęsły, należący do funkcyi sinus obliczymy, odejmując pierwszy kąt od $180^0$, stósownie do wzoru:

$$\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha.$$

Kąt wypukły należący do pozostałych funkcyj znajdziemy, opierając się na wzorach:

$$\cos(360 - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(180 + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(180 + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha.$$

b) Gdy fnnkcya jest ujemną, wtenczas oba do niej należące kąty są większe od $90^0$.

Przy sinusie oba są wypukłe (jeden w ćwiartce III, drugi w IV); przy cosinusie jeden jest wklęsły (w ćwiartce II), drugi wypukły (w ćwiartce III); przy tangensie i cotangensie jeden jest wklęsły (w ćwiartce II), drugi wypukły (w świartce IV).

Ponieważ zaś:

$$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\operatorname{tg}(180-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(180-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$$

przeto funkcye: (cos $180-\alpha$), tg $(180-\alpha)$, cotg $(180-\ )$ będą dodatnie; z nich też wynajdziemy kąt ostry: $180-\alpha$, poczem także i kąt rozwarty: $\alpha$.

Kąt wypukły odpowiadający tym funkcyom znajdziemy ze wzorów w a) podanych.

Do ujemnej wartości funkcyi sinus należące kąty wypukłe znajdziemy, opierając się na wzorze:

$$\sin(360-\alpha) = -\sin\alpha$$

bo wtenczas funkcya sin $(360-\alpha)$ będzie miała wartość dodatną; z niej wyszukamy dwa kąty wklęsłe, mianowicie: $360-\alpha_1$ i $360-\alpha_2 = 180-(360-\alpha_1)$, poczem także i kąty wypukłe $\alpha_1$ i $\alpha_2$.

Uwaga. Ponieważ funkcya kąta n $(360^0+\alpha)$, gdzie n oznacza liczbę całkowitą, równa się równoimiennej funkcyi kąta $\alpha$, przeto gdy kąt $\alpha$ odpowiada pewnej funkcyi, wtenczas odpowiada jej także i kąt: n $(360^0+\alpha)$. Ogólna więc wartość należąca do pewnej funkcyi jest: $\alpha +$ n. $360^0$.

### Przykład 1.

$\sin\alpha = 0{\cdot}3872$

$\log\sin\alpha = \log 0{\cdot}3872 = 9{\cdot}58794 - 10$

skąd: $\alpha_1 = 22^0\ 46'\ 50''$

$\alpha_2 = 180 - \alpha_1 = 157^0\ 13'\ 10''$

zatem ogólna wartość jest: $\alpha = 22^0\,46'\,50'' +$ n. $360^0$ i $\alpha = 157^0\,13'\,10'' +$ n. $360^0$.

### Przykład 2.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{50}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\log 1 = 10{\cdot}00000 - 10\\ \frac{1}{3}\log 50 = 0{\cdot}56632\end{array}\right\}$$

$\log\cos\alpha = 9{\cdot}43368 - 10$

skąd: $\alpha_1 = 74^0\ 14'\ 59''$

drugi kąt do tej funkcyi należący jest wypukły i równa się $360-\alpha_1 = 285^0\ 45'\ 1''$.

Ogólna wartość jest: $\alpha = 74^0\ 14'\ 59'' +$ n. $360^0$ i $\alpha = 285^0\ 45'\ 1'' +$ n. $360^0$.

**Przykład 3.**

$\sin \alpha = -0{\cdot}3872$

przeto $\sin (360 - \alpha) = 0{\cdot}3872$

$\log \sin (360 - \alpha) = 9{\cdot}58794 - 10$

skąd $360 - \alpha_1 = 22^0\ 46'\ 50''$

$360 - \alpha_2 = 157^0\ 13'\ 10''$

zatem $\alpha_1 = 337^0\ 13'\ 10''$, $\alpha_2 = 202^0\ 46'\ 50''$

więc ogólna wartość $\alpha = 337^0\ 13'\ 10'' + n.\ 360^0$ i $\alpha = 202^0\ 46'\ 50'' + n.\ 360^0$.

**Przykład 4.**

$\operatorname{tg} \alpha = -7{\cdot}35$

przeto $\operatorname{tg} (180 - \alpha) = 7{\cdot}35$

$\log \operatorname{tg} (180 - \alpha) = 10{\cdot}86629 - 10$

skąd $180 - \alpha_1 = 82^0\ 15'\ 8''$

zatem $\alpha_1 = 97^0\ 44'\ 52$

drugi kąt do tej funkcyi należący jest wypukły i równa się: $180 + \alpha_1 = 277^0\ 44'\ 52''$.
Ogólna wartość: $\alpha = 97^0\ 44'\ 52'' + n.\ 360^0$ i $\alpha = 277^0\ 44'\ 52'' + n.\ 360^0$.

Uwaga. W tablicach Adama podane są wartości wstawy, dostawy, stycznej i dotycznej dla kątów od $0^0$ do $90^0$.

---

## Równania goniometryczne.

§. 24. Równanie przestępne, zawierające różne funkcye niewiadomego kąta, nazywa się równaniem goniometrycznem.

Chcąc rozwiązać takie równanie, przerabia się je w ten sposób, aby zawierało tylko jedną funkcyę i tę się następnie wyznacza.

Przykłady:

**1) Jakie kąty czynią zadość równaniu:**

$2 \sin x = 3 \cos x.$

Dzieląc to równanie przez $2 \cos x$, otrzymamy:

$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$$

$\log \operatorname{tg} x = 10{\cdot}17609 - 10$

skąd $x_1 = 56^0\ 18'\ 35''$ i $x_2 = 180^0 + x_1$

ogólna wartość: $x = x_1 + 360^0 n$ i $x = x_2 + 360^0 n$

**2) Jakie kąty czynią zadość równaniu:**

$\operatorname{tg}^2 x + 4 \cos^2 x = 3.$

Wyrażając $\cos^2 x$ przez $\operatorname{tg}^2 x$, otrzymamy:

$\operatorname{tg}^4 x - 2 \operatorname{tg}^2 x = -1$

$\operatorname{tg}^2 x = 1 \pm \sqrt{1 - 1} = 1$

$\operatorname{tg} x = \pm 1.$

Wartości: $tgx = +1$ odpowiadają kąty: $45^0$ i $225^0$, zaś wartości: $tgx = -1$ kąty $135^0$ i $315^0$,

przeto: $x = 45^0 + m.\ 90^0 + n.\ 360^0$.

Za m można położyć: 0, 1, 2, 3, zaś za n jakąkolwiek liczbę całkowitą.

**3) Jakie kąty wklęsłe, należą do równania:**

$$4 \sin x - 3 \cos x = 2.$$

Wyrażając $\cos x$ przez $\sin x$, otrzymamy:

$$4 \sin x - 3 \sqrt{1 - \sin^2 x} = 2$$

$$3 \sqrt{1 - \sin^2 x} = 4 \sin x - 2$$

$$\sin^2 x - \frac{16}{25} \sin x = \frac{5}{25}$$

$$\sin x = \frac{8}{25} \pm \frac{\sqrt{189}}{25} = 0{\cdot}32 \pm 0{\cdot}54991.$$

Aby mieć kąty wklęsłe, należy wziąć tylko znak $+$, zatem

$$\sin x = 0{\cdot}85991$$

$$\log \sin x = \log 0{\cdot}86991 = 9{\cdot}93947 - 10$$

$$x_1 = 60^0\ 26'\ 50''$$

$$x_2 = 119^0\ 33'\ 10''.$$

Z tych dwóch pierwiastków (należących do równania: $\sin^2 x - \frac{16}{25} \sin x = \frac{5}{25}$) tylko pierwszy jest pierwiastkiem danego równania ($4 \sin x - 3 \cos x = 2$); drugi zaś jest pierwiastkiem następującego równania: $4 \sin x + 3 \cos x = 2$.

Dane równanie można jeszcze rozwiązać wprowadzając funkcyę kąta pomocniczego.

Mianowicie:

$$4 \sin x - 3 \cos x = 2$$

$$\sin x - \frac{3}{4} \cos x = \frac{1}{2}$$

Przyjmując kąt $\gamma$ taki, by było:

$$tg\ \gamma = \frac{3}{4} \quad \text{skąd} \quad \gamma = 36^0,\ 52'\ 11'', \quad \text{otrzyma się:}$$

$$\sin x - tg\ \gamma \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x \cos \gamma - \sin \gamma \cos x = \frac{1}{2} \cos \gamma$$

$$\sin (x - \gamma) = \frac{1}{2} \cos \gamma$$

$$\sin (x - 36^0\ 52'\ 11'') = \frac{1}{2} \cos 36^0\ 52'\ 11''$$

$$\log \cos 36^0\ 52'\ 11 = 9{\cdot}90309 - 10$$

$$\log 2 = 0{\cdot}30103$$

$$\log \sin (x - 36^0\ 52'\ 11'') = 9{\cdot}60206 - 10$$

$$x - 36^0\ 52'\ 11'' = 23^0\ 34'\ 41''$$

$$x = 60^0\ 26'\ 52'' \quad (60^0\ 26'\ 50'')$$

Uwaga. Rozwiązując w ten sam sposób równanie: $4 \sin x + 3 \cos x = 2$, otrzymamy: $x = 119^0\ 33'\ 10''$.

**4) Znaleść kąty wklęsłe i wypukłe należące do równania:**

$$4 \sin (18^0\ 36' + x) = 7 \cos (24^0\ 20' + x)$$

Tu będzie:

$$4 \sin 18^0\,36' \cos x + 4 \cos 18^0\,36' \sin x = 7 \cos 24^0\,20' \cos x - 7 \sin 24^0\,20' \sin x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{7 \cos 24^0\,20' - 4 \sin 18^0\,36'}{7 \sin 24^0\,20' + 4 \cos 18^0\,36'}$$

$\log \sin 24^0\,20' = 9{\cdot}61494 - 10$; $\sin 24^0\,20' = 0{\cdot}41204$

$\log \cos 24^0\,20' = 9{\cdot}95960 - 10$; $\cos 24^0\,20' = 0{\cdot}91118$

$\log \sin 18^0\,36' = 9{\cdot}50374 - 10$; $\sin 18^0\,37' = 0{\cdot}31896$

$\log \cos 18^0\,36' = 9{\cdot}97670 - 10$; $\cos 18^0\,36' = 0{\cdot}94778$

$$\operatorname{tg} x = \frac{5{\cdot}1024}{6{\cdot}6754}$$

$\log \operatorname{tg} x = 9{\cdot}88330 - 10$

$x_1 = 37^0\ 23'\ 35''$

$x_2 = 217^0\ 23'\ 35''$

**5)** $\begin{cases} x + y = 154^0\ 52' \\ \sin x + \sin y = 0{\cdot}8 \end{cases}$

Ponieważ: $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, będzie:

$$\cos \frac{x-y}{5} = \frac{0{\cdot}4}{\sin 77^0\ 26'}$$

$$\log \cos \frac{x-y}{2} = 9{\cdot}61259 - 10$$

skąd: $\frac{x-y}{2} = 65^0\ 48'\ 24''$

że zaś: $\frac{x+y}{2} = 77^0\ 26'$

przeto: $x = 143^0\ 14'\ 24''$

$y = 11^0\ 37'\ 36''$

**6)** $\begin{cases} x + y = 152^0\,16 \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = 5{\cdot}84 \end{cases}$

Podstawiając w drugiem równaniu wartość za y z pierwszego równania, otrzymamy:

$$\sin x = 5{\cdot}84 \ \sin 152^0\, 16'. \ \cos x - 5{\cdot}84 \ \cos 152^0\, 16' \sin x$$

$$\operatorname{tg} x - \frac{5{\cdot}84 \ \cos 62{\cdot}16'}{1 - 5{\cdot}84 \ \sin 62^0\, 16'}$$

$$\log 5{\cdot}84 - 0{\cdot}76641$$

$$\log \sin 62^0\, 16' - 9{\cdot}94700 - 10$$

$$\log 5{\cdot}84 \ \sin 62^0 \ 16' = 10{\cdot}71341 - 10$$

$$5{\cdot}84 \ \sin 62^0 \ 16' = 5{\cdot}169$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{5{\cdot}84 \ \cos \ 62^0 \ 16'}{4{\cdot}169}$$

$$\operatorname{tg}(180 - x) = \frac{5{\cdot}84 \ \cos \ 62^0 \ 16'}{4{\cdot}169}$$

$$180 - x = 33^0 \ 5' \ 56''$$

zatem $x = 146^0 \ 54' \ 4''$

$y = 5^0 \ 21' \ 56''$

Równanie dane można jeszcze rozwiązać innym sposobem, mianowicie:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5{\cdot}84 + 1}{5{\cdot}84 - 1}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x+y}{2}} = \frac{6{\cdot}84}{4{\cdot}84}, \quad \text{skąd}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{4{\cdot}84 \ . \ \operatorname{tg} 76^0\, 8'}{6{\cdot}84};$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = 10{\cdot}45734 - 10$$

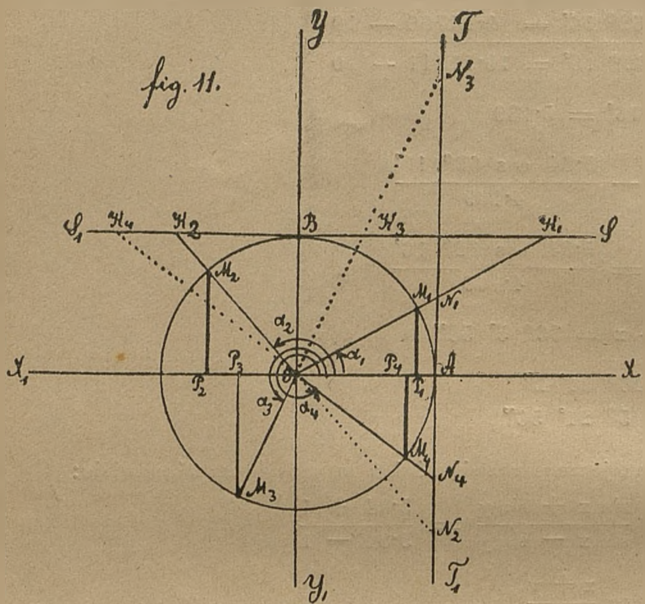
zatem $\frac{x-y}{2} = 70^0 \ 46' \ 4''$;

przeto $x = 146^0 \ 54' \ 4''$

$y = 5^0 \ 21' \ 56''$

## Graficzne przedstawienie funkcyi kąta.

§. 25. Z początku spółrzędnych zakreślmy koło promieniem równym jedności, wyrysujmy do niego styczne TT' i SS' w punktach A i B, w których przecinają go dodatnie kierunki osi Xów i Yów, przedłużmy ramię ruchome kąta w tym samym kierunku, lub w razie potrzeby w kierunku przeciwnym po za początek spółrzędnych aż do przecięcia się z jedną i z drugą styczną (z pierwszą w punkcie N, z drugą w punkcie K) i wykreślmy spółrzędne (x, y) punktu M położonego na obwodzie koła, tedy:




a) Rzędne $P_1M_1$, $P_2M_2$, . . . przedstawiają sinusy (wstawy), zaś odcięte $OP_1$, $OP_2$, . . . cosinusy (dostawy) kątów $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, albowiem:

$$\sin\alpha_1 = \frac{y_1}{r} = \frac{y_1}{1} = y_1 = M_1P_1\,; \quad \cos\alpha_1 = \frac{x_1}{r} = \frac{x_1}{1} = x_1 = OP_1\,;$$

$$\sin\alpha_2 = \frac{y_2}{r} = \frac{y_2}{1} = y_2 = M_2P_2\,; \quad \cos\alpha_2 = \frac{x_2}{r} = \frac{x_2}{1} = x_2 = OP_2\,;$$

b) $AN_1$, $AN_2$, $AN_3$, $AN_4$ przedstawiają tangenty (styczne), zaś $ON_1$, $ON_2$, $ON_3$, $ON_4$ secanty (sieczne) kątów $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, albowiem mając na uwadze podobieństwo trójkątów: $OM_1P_1$ i $OAN_1$, $OM_2P_2$ i $OAN_2$, . . . będzie:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{M_1P_1}{OP_1} = \frac{AN_1}{OA} = \frac{AN_1}{1} = AN_1\,; \quad \sec\alpha_1 = \frac{r}{x_1} = \frac{OM_1}{OP_1} = \frac{ON_1}{OA} = \frac{ON_1}{1} = ON_1\,;$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{y_2}{x_2} = \frac{M_2P_2}{OP_2} = \frac{AN_2}{OA} = \frac{AN_2}{1} = AN_2\,; \quad \sec\alpha_2 = \frac{r}{x_2} = \frac{OM_2}{OP_2} = \frac{ON_2}{OA} = \frac{ON_2}{1} = ON_2\,;$$

itd.

$AN_1$ i $AN_3$ tudzież $ON_1$ i $ON_4$ są dodatne, zaś $AN_2$ i $AN_4$ tudzież $ON_2$ i $ON_3$ są ujemne.

c) $BK_1$, $BK_2$, $BK_3$, $BK_4$ przedstawiają cotangenty (dotyczne), zaś $OK_1$, $OK_2$, $OK_3$, $OK_4$ cosecanty (dosieczne) kątów $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$, albowiem mając na uwadze podobieństwo trójkątów: $OM_1P_1$ i $OBK_1$, $OM_2P_2$ i $OBK_2$,... będzie:

$$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{x_1}{y_1} = \frac{OP_1}{M_1P_1} = \frac{BK_1}{OB} = \frac{BK_1}{1} = BK_1;$$

$$\operatorname{cosec} \alpha_1 = \frac{r}{y_1} = \frac{OM_1}{M_1P_1} = \frac{OK_1}{OB} = \frac{OK_1}{1} = OK_1;$$

itd.

$BK_1$ i $BK_3$ tudzież $OK_1$ i $OK_2$ są dodatne, zaś $BK_2$ i $BK_4$ tudzież $OK_3$ i $OK_4$ są ujemne.

Uwaga. Z figury tej możemy poznać, jaki znak algebraiczny mają funkcye trygonometryczne w każdej ćwiartce, jak się zmienia wielkość funkcyj ze zmianą kąta, tudzież jaką wartość otrzymują funkcye dla kątów: $0^0$, $90^0$, $180^0$ i $270^0$ (porównaj §. 4.)

# ĆWICZENIA.

(§. 2.)

1) Znaleźć wartości funkcyj trygonometrycznych dla kątów $18^0$ i $72^0$.

Stósuję wzór wyrażający związek między bokiem 10-boku foremnego wpisanego w koło i promieniem tego koła, mianowicie: $a = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$, a znajdę:

$$\sin 18^0 = \cos 72^0 = \frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}; \quad \cos 18^0 = \sin 72^0 = \frac{\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}}}{r} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4} \text{ itd.}$$

2) Wykreślić kąt $\alpha$ wiedząc, że: a) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; b) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$ d) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{7}{8}$; e) $\sec\alpha = 2$; f) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{10}{3}$.

3) Wykreślić kąt $\alpha$ wiedząc, że: a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$; b) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{6}$.

(§§. 3—6).

4) Obliczyć funkcye kątów: a) $108^0$; b) $120^0$; c) $135^0$; d) $150^0$; e) $162^0$; f) $198^0$; g) $210^0$; h) $225^0$; i) $240^0$; k) $252^0$; l) $288^0$; m) $300^0$; n) $315^0$; o) $330^0$; p) $342^0$.

5) Obliczyć $\sin(-30^0)$ i inne funkcye kąta $(-30^0)$.

Rzędna kąta $(-30^0)$ równa się: $-\frac{r}{2}$, zatem $\sin(-30) = \frac{-\frac{r}{2}}{r} = -\frac{1}{2}$; itd.

6) Obliczyć funkcye kątów: a) $-18^0$; b) $-45^0$; c) $-60^0$; d) $-72^0$; e) $-90^0$.

7) Obliczyć funkcye kątów: $390^0$ i $468^0$.

(§§. 7—8).

8) Dane są funkcye: a) $\cos\alpha$; b) $\operatorname{cotg}\alpha$; c) $\sec\alpha$; d) $\operatorname{cosec}\alpha$; znaleść wszystkie inne funkcye.

9) $\operatorname{Tg}\alpha = \frac{a}{b}$; obiczyć $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

$$\left(\sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

10) Gdy: a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; b) $\sin\alpha = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; c) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$;

d) $\cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; e) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$; f) $\operatorname{cotg}\alpha = 1$; g) $\sec\alpha = 2$;

h) $\operatorname{cosec}\alpha = -10$; obliczyć pozostałe funkcye.

Uwaga (do przykł. 8, 9 i 10). Mając daną jednę funkcyę, obliczamy wszystkie inne stósując wzory podane w §. 7. Do obliczenia tych funkcyj dojdziemy jeszcze i w ten sposób: Gdy daną jest jakaś funkcya, wtenczas z trzech ilości x, y, r możemy dwie uważać jako znane, przeto za pomocą twierdzenia Pitagorasa obliczymy 3cią ilość, poczem poznamy już wszystkie funkcye.

Np. a) Gdy $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, wtenczas mogę przyjąć $y = a$, $x = b$, zatem z twierdzenia Pitagorasa wypadnie $r = \sqrt{a^2+b^2}$, skąd $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

b) $\operatorname{cosec}\alpha = -10$; mogę przyjąć $r = 10$, $y = -1$, z twierdzenia Pitagorasa wypadnie $x = \pm\sqrt{99}$, skąd $\sin\alpha = \frac{-1}{10}$, $\cos\alpha = \frac{\pm\sqrt{99}}{10}$ itd. (+ odnosi się do IV ćwiartki, — do III).

c) Gdy dana jest funkcya $\sin\alpha$, wtenczas ponieważ $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, mogę przyjąć $y = r\sin\alpha$, $r = r$, zatem z twierdzenia Pitagorasa znajdę $x = \pm r\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, przeto $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \pm\frac{r\sin\alpha}{r\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$; itd.

d) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; tu mogę przyjąć: $y = \pm 3$, $x = \pm 4$, zatem $r = \sqrt{9+16} = 5$, przeto $\sin\alpha = \frac{y}{r} = \pm\frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r} = \pm\frac{4}{5}$. (+ odnosi się do I ćwiartki, — do III).

11) Jakie wartości na: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{cotg}\alpha$ czynią zadość równaniu: $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1}{2}$.

Wyrażając $\cos\alpha$ przez $\sin\alpha$, otrzymamy równanie: $1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$, z którego znajdziemy: $\sin\alpha = \pm\frac{1}{2}$, a tem samem i inne funkcye.

12. Znaleść $\operatorname{tg}\alpha$ i inne funkcye kąta $\alpha$ z równania:

$$6 \operatorname{tg}\alpha - 7 + 2 \operatorname{cotg}\alpha = 0. \quad \left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \text{ i } \operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}\right).$$

(§§. 9—13).

13) Wyprowadzić związki między funkcyami kątów: a) $\alpha$ i $(180 + \alpha)$; b) $\alpha$ i $(270 - \alpha)$; c) $\alpha$ i $(270 + \alpha)$; d) $\alpha$ i $(360 - \alpha)$.

14) Funkcye kątów: a) $148^0$, b) $212^0$, c) $294^0$, d) $425^0$ wyrazić przez funkcye kątów mniejszych od $90^0$.

15) Wiedząc, czemu są równe funkcye kątów: $18^0$, $30^0$ i $45^0$, obliczyć funkcye kątów podanych w przykł.: 4), 5) i 6).

16) Równania: a) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, b) $\cos\alpha = -0\cdot72$, c) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{5}$, d) $\operatorname{cotg}\alpha = -3\cdot2$, przerobić na inne tak, aby w nich nie zachodził znak: —.

Rozwiązanie. a) $\sin(360 - \alpha) = \frac{3}{5}$, $\cos(180 - \alpha) = 0\cdot72$, itd.

17) Niech $\alpha$ oznacza kąt ostry; dla którego jeszcze kąta w pozostałych trzech ćwiartkach sinus ma tę samą wartość co dla kąta $\alpha$, dla którego ma tę samę wartość cosinus, dla którego tangens, a dla którego cotangens.

Rozwiązanie. Sinusy mają tę samą wartość dla kątów: $\alpha$ i $(180 - \alpha)$, cosinusy dla kątów: $\alpha$ i $(360 - \alpha)$, itd.

18) Znaleść wartości na kąt $\alpha$, (między $0^0$ i $360^0$), czyniące zadość równaniom: a) $\sin\alpha = \sin 40^0$, b) $\cos\alpha = \cos 40^0$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 40^0$, d) $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{cotg} 40^0$.

Rozwiązanie. Równaniu $\sin\alpha = \sin 40^0$, czynią zadość kąty $40^0$ i $140^0$, itd.

19) Znaleść wartości na kąt $\alpha$ (między $0^0$ i $360^0$), czyniące zadość równaniom: a) $\sin\alpha = \cos 20^0$, b) $\cos\alpha = \sin 20^0$, c) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg} 20^0$, d) $\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg} 20^0$.

Rozwiązanie. a) $\sin\alpha = \sin 70^0$, itd.

20) Znaleść wartości na kąt $\alpha$ (między $0^0$ i $360^0$) czyniące zadość równaniom: a) $\sin\alpha = -\sin 35^0$, b) $\cos\alpha = -\cos 35^0$, c) $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg} 35^0$, d) $\operatorname{cotg}\alpha = -\operatorname{cotg} 35^0$.

Rozwiązanie. a) $\alpha = 325^0$ i $215^0$, b) $\alpha = 145^0$ i $215$, c) $\alpha = 145^0$ i $325^0$, d) $\alpha = 145^0$ i $325^0$.

21) Jakie kąty (między $0^0$ i $360^0$), czynią zadość równaniom:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, b) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, c) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$, d) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$

Rozwiązanie. a) $\alpha = 30^0$ i $150^0$, b) $\alpha = 135^0$ i $225^0$, c) $\alpha = 72^0$ i $288^0$, d) $\alpha = 150^0$ i $330^0$.

(§§. 14—19).

22) Wyprowadzić wzory: 13) i 14) (w §. 14) pod założeniem: że oba kąty są rozwarte, lub oba wypukłe.

23) Sinus, cosinus, tangens i cotangens kątów: a) $180^0$, b) $212^0$, c) $294^0$, d) $315^0$, e) $428^0$ wyrazić przez funkcye kątów ostrych.

24) Obliczyć funkcye kąta $15^0$.

Rozwiązanie 1. $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0) = \ldots = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$; itd.

Rozwiązanie 2. $\sin 15^0 = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^0}{2}} =$ itd.

25) Obliczyć funkcye kąta: $22^0\ 30'$.

26) Obliczyć funkcye kątów: $3^0$, $6^0$, $9^0$, $12^0$, . . .

Rozwiązanie. $\sin 3^0 = \sin(18^0 - 15^0) = \ldots$
$\sin 6^0 = \sin(3^0 + 3^0) = \ldots$
$\sin 9^0 = \sin(6^0 + 3^0) = \ldots$

27) Okazać, że: a) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, b) $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, c) $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$.

Rozwiązanie. $\cos 3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) =$ itd.

28) Okazać, że:

a) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$,

b) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)(\cos\gamma + i\sin\gamma) = \cos\alpha + \beta + \gamma) + i\sin(\alpha + \beta + \gamma)$;

c) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)\ldots = \cos(\alpha + \beta + \ldots) + i\sin(\alpha + \beta + \ldots)$

d) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$;

e) $(\cos\alpha + i\sin\beta)^3 = \cos 3\alpha + i\sin 3\alpha$;

f) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ (wzór Moivre'a);

tu i oznacza jednostkę urojoną, tj. $i = \sqrt{-1}$.

Uwaga. 1) Podnosząc pierwszą stronę równania e) do potęgi 3ciej, otrzymamy: $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha$; $\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$ (porównaj z przykł. 27).

2) Za pomocą równania f) możemy $\cos n\alpha$ lub też $\sin n\alpha$ wyrazić przez $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$.

29) Okazać, że:

a) $$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos(n+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

b) $$\sin\alpha + \sin 2a + \ldots + \sin n\alpha = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin(n+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Jeżeli w równaniu $x + x^2 + \ldots x^n = \frac{x^{n+1} - x}{x - 1}$ wyrażającem sumę postępu geometrycznego, podstawimy: $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, a do potęg $x^2, x^3, \ldots$ zastosujemy wzór Moivre'a (prz. 28), otrzymamy:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha + i\sin n\alpha =$$

$$= \frac{\cos(n+1)\alpha + i\sin(n+1)\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha - 1} =$$

$$= \frac{-2\sin\frac{n\alpha+\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2} + 2i\cos\frac{n\alpha+\alpha+\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{-2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Dzieląc teraz licznik i mianownik ostatniego ułamka przez 2, a następnie mnożąc przez $-\sin^2\frac{\alpha}{2} - i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, dojdziemy, po odpowiedniem przerobieniu, do następującego równania:

$$\cos\alpha + i\sin\alpha + \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha + i\sin n\alpha =$$

$$= \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\alpha+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} + i\,\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha+\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Równanie to z uwagi, że część rzeczywista strony pierwszej równać się musi części rzeczywistej strony drugiej, a część urojona urojonej, rozpada się na dwa równania wypisane wyżej w tym przykładzie pod a) i b).

30) Okazać że:

a) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta) \,.\, \sin(\alpha-\beta)$

b) $\cos^2\alpha - \sin^2\beta = \cos(\alpha+\beta) \,.\, \cos(\alpha-\beta)$

c) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = -\sin(\alpha+\beta) \,.\, \sin(\alpha-\beta)$.

31) Okazać, że:

a) $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

b) $\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

32) Okazać, że:

a) $\sin(-\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

b) $\cos(-\alpha+b+\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha+\beta+\gamma) = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

33) Zamienić na iloczyn:

a) $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta$; b) $\operatorname{cotg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta$; c) $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\beta$; d) $\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{cotg}\alpha$.

34) Zamienić na iloczyn: $\sin\alpha \pm \cos\alpha$.

35) Wyrażenia: a) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$; b) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$; c) $\frac{\sin\alpha\pm\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$; d) $\frac{\sin\alpha\pm\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}$ zamienić na inne, w którychby nie przychodziła ani suma, ani też różnica.

36) Wyrazić: $\operatorname{tg} 2\alpha$, $\operatorname{tg} 3\alpha$ i $\operatorname{tg} 4\alpha$ przez $\operatorname{tg}\alpha$.

37) Okazać, że: a) $\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$; b) $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \cos 2\alpha$;

c) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$; d) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$; e) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha \,.\, \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1} =$

$= 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; f) $\dfrac{2\cos\alpha}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \sin\alpha$; g) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

h) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$.

38) Zamienić na iloczyn: a) $1+\sin\alpha$; b) $1-\sin\alpha$;
c) $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{cotg}\beta - \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{tg}\beta$.

Wyrażenie pod c) równa się: $\dfrac{4\sin(\alpha+\beta)\,.\,\sin(\alpha-\beta)}{\sin 2\alpha \sin 2\beta}$

39) Obliczyć: a) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)$; b) $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)$, przyjmując:
$\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\operatorname{tg}\beta = 2$, $\operatorname{tg}\gamma = 3$.

(§. 22—23).

40) Znaleść następxjące logarytmy:

a) $\log\sin 75^0\ 13'\ 24''$; b) $\log\cos 17^0\ 15'$;
c) $\log\operatorname{tg} 63^0\ 8'\ 40''$; d) $\log\operatorname{cotg} 47^0\ 23'$.

41) Znaleść kąty, odpowiadające następującym logarytmom:

a) $\log\sin\alpha = 8{\cdot}27606 - 10$; b) $\log\cos a = 0{\cdot}88672 - 2$;
c) $\log\operatorname{tg}\alpha = -0{\cdot}31894$; d) $\log\operatorname{cotg}\alpha = 1{\cdot}30987$.

42) Znaleść wartość wstawy, dostawy, stycznej i dotycznej następujących kątów:

a) $54^0\ 5'\ 12''$; b) $48^0\ 13'$; c) $112^0\ 14'$; d) $172^0\ 16'\ 18''$; e) $198^0\ 40''$
f) $250^0\ 8'$; g) $292^0\ 4'\ 15''$; h) $315^0\ 17'\ 2''$.

43) Znaleść kąty wklęsłe, należące do następujących wartości funkcyj trygonometrycznych:

a) $\sin\alpha = 0{\cdot}79354$; b) $\sin\alpha = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4\sqrt{10}}$; c) $\sin\alpha = 3-\sqrt{5}$;

d) $\cos\alpha = -\dfrac{7}{15}$; e) $\cos\alpha = \dfrac{7{\cdot}34}{3{\cdot}45^2}$; f) $\cos\alpha = \dfrac{1-\sqrt[7]{4}}{1+\sqrt[7]{4}}$;

g) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3{\cdot}87}{\sqrt[3]{7{\cdot}94}}$; h) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{tg} 78^0\ 5'\ 14''}{\operatorname{cotg} 47^0\ 9'\ 10''}$; i) $\operatorname{tg}\alpha = -7$;

k) $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1-2\sqrt[3]{5}}{6}$; l) $\operatorname{cotg}\alpha = \cos 152^0\ 13'\ 16'' \sin 84'\ 3'$.

W przykładach: b) c) f) k) należy najpierw usunąć sumy (różnice) z wyrażeń, które się ma logarytmować. Biorąc np. pod uwagę przykł. f), obliczam $\sqrt[7]{4}$; mianowicie: $\frac{1}{7}\log 4 = 0\cdot08601$, skąd $\sqrt[7]{4} = \text{num}\log 0\cdot08601 = 1\cdot219$; zatem $\cos\alpha = -\frac{0\cdot219}{2\cdot219}$; itd.

W przykładzie l) będzie: $\text{cotg}\,\alpha = \text{cotg}\,(180^0 - 27^0\,46'\,44'')\sin 84^0\,3' =$
$= -\cos 27^0\,46'\,44''\,\sin 84^0\,3'$; itd.

43) Znaleść kąty wklęsłe i wypukłe, należące do następujących funkcyj: a) $\cos\alpha = 0\cdot836$; b) $\text{tg}\,\alpha = 2\cdot381$; c) $\text{cotg}\,\alpha = 0\cdot386$; d) $\sin\alpha = -0\cdot754$; e) $\cos\alpha = -0\cdot254$; f) $\text{tg}\,\alpha = -0\cdot82$, g) $\text{cotg}\,\alpha = \pm\,0\cdot794$

45) Znaleść ogólną wartość na kąty, należące do funkcyj: a) $\sin\alpha = \pm\,0\cdot382$; b) $\cos\alpha = \pm\,0\cdot74568$; c) $\text{tg}\,\alpha = \pm\,2\cdot34$; d) $\text{cotg}\,\alpha = \pm\,0\cdot794$.

(§. 24).

Rozwiązać następujące równania goniometryczne:

46) $a\sin x + b\cos x = o$.

47) $a\sin(x+\alpha) = b\cos(x+\beta)$.

48) $2\sin^2 x - \cos^2 x + 5\sin x\cos x = 3$ ($x_1 = 45^0$, $x_2 = 75^0\,57''\,50$)

Zamiast 3 piszę $3(\cos^2 x + \sin^2 x)$, następnie dzielę równanie przez $\cos^2 x$.

49) $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x\cos x + d = o$

50) $3\cos x = 2\,\text{cotg}\,x$ ($x_1 = 90^0$, $x_2 = 41^0\,48^0\,39''$, $x_3 = 138^0\,11'\,21''$)

51) $5\sin x = 3\,\text{tg}\,x$

52) $3\cos x = 2\,\text{tg}\,x$ ($x_1 = 46^0\,7'\,2''$, $x_2 = 133^0\,52'\,48''$)

53) $6\sin x = 3\cos^2 x + 1$ ($x_1 = 31^0\,50'\,12''$, $x_2 = 148^0\,5'\,48''$)

54) $3\,\text{tg}\,x + 4\,\text{cotg}\,x = 10$

55) $7\,\text{tg}\,x - 3\,\text{cotg}\,x = 8$.

56) $\sin(3x + 50^0\,4') = \cos(2x - 30^0\,16')$ ($x_1 = 9^0\,40'$, $x_2 = 14^0\,2'\,24''$

57) $3\sin x - 5\cos x + 3\,\text{tg}\,x = 5$ ($x_1 = 59^0\,2'\,10''$, $x_2 = 180^0$)

58) $\text{cotg}\,x + \cos x = 1 + \sin x$ ($x = 45^0$)

59) $\text{cotg}\,x - \cos x = 1 - \sin x$ ($x_1 = 45^0$, $x_2 = 90^0$)

60) $3\sin^2 x + 2\cos^2 x = 2\cdot7$ ($x_1 = 21^0\,58'\,21''$, $x_2 = 158^0\,1'\,39''$)

61) $3(\cos x - \sin x)^2 = 8\sin 2x$ ($x_1 = 7^0\,54'\,48''$, $x_2 = 82^0\,5'\,12''$)

62) $3 - 2\cos\frac{x}{2} + 3\cos x = o$ ($x_1 = 141^0\,3'\,26''$, $x_2 = 180^0$)

63) $a(1+\cos x) = b\sin x$ $\left(\cos\frac{x}{2} = o,\ \text{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{a}{b}\right)$

64) $3(1-\cos x) = 2\sin x$ ($x_1 = o$, $x_2 = 67^0\,22'\,50''$)

65) $\sin x - \cos x = 0\cdot4$ ($x_1 = 61^0\,25'\,48''$)

66) $\frac{\sin x}{1 - 2\sin^2\frac{x}{2}} = \sqrt{3}$ (otrzymamy: $\text{tg}\,x = \sqrt{3}$, przeto $x = 60^0$).

67) $\sin 2x \sin x + \cos x = 1$ $(x_1 = 0^0, x_2 = 68^0\,31'\,47'')$

68) $a \sin^2 x + b \cos^2 x + c \sin 2x = 0$ $\left(\operatorname{tg} x = -\frac{c}{a} \pm \frac{\sqrt{c^2 - ab}}{a}\right)$

69) $\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos x} = \sqrt{3}$ $(x_1 = 20^0, x_2 = 90^0)$

70) $\cos (n-2) x - \cos n x = \sin x$ $\left(x = 0^0, \frac{30^0}{n-1}, \frac{150^0}{n-1}\right)$

71) $\operatorname{tg} x + 2 \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}} = 3$ $(x_1 = 45^0, x_2 = 63^0\,26'\,6'')$

72) $(1 - \cos x)^{\frac{2}{5}} + 2 (1 + \cos x)^{\frac{2}{5}} = 3 (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{5}}$ $(x_1 = 90^0, x_2 = 159^0\,57'\,2'')$

dzieląc równanie przez $(1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{5}}$, otrzymamy:

$$\sqrt[5]{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + 2 \sqrt[5]{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = 3,$$ skąd nazywając: $\sqrt[5]{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = y,$

dostaniemy: $y + \frac{2}{y} = 3$, itd.

73) $a^{2 \operatorname{tg} x} + b\, a^{\operatorname{tg} x} = c$

74) $3^{\operatorname{tg} x} + 3^{-\operatorname{tg} x} = 2 \sqrt{3}$

Znajdziemy: $3^{\operatorname{tg} x} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

więc: $3^{\operatorname{tg} x_1} = \sqrt{3} + \sqrt{2} = 3{\cdot}14626$

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{\log 3{\cdot}14626}{\log 3} = \frac{0{\cdot}49780}{0{\cdot}47712}$$

$$x_1 = 46^0\,12'\,55''$$

$$3^{\operatorname{tg} x_2} = \sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{3^{\operatorname{tg} x_1}}$$

zatem $\operatorname{tg} x_2 = - \operatorname{tg} x_1$

$$x_2 = 180 - x_1$$

75) Rozwiązać równania:

$\alpha$) $x^2 + ax + b = 0$; $\beta$) $x^2 - ax + b = 0$;

g) $x^2 + ax - b = 0$; $\delta$) $x^2 - ax - b = 0$.

w których spółczynniki a, b są liczbami dodatniemi, z pomocą funkcyi goniometrycznych.

Rozwiążmy każde z tych równań sposobem zwyczajnym, następnie za: $\frac{4b}{a^2}$ przy $\alpha$) i $\beta$), jeżeli $\frac{4b}{a^2} \leq 1$, podstawmy $\sin^2\alpha$; zaś przy g) i $\delta$) podstawmy $\operatorname{tg}^2\alpha$, a będzie:

$\alpha$) $x^2 + ax + b = 0$ $\qquad x_1 = -\sqrt{b}\,\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ $\qquad \sin\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} \qquad x_2 = -\sqrt{b}\,\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

$\beta$) $x^2 - ax + b = 0$ $\qquad x_1 = \sqrt{b}\,\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ $\qquad \sin\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} \qquad x_2 = \sqrt{b}\,\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$\gamma$) $x^2 + ax - b = 0$ $\qquad x_1 = \sqrt{b}\,\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}} \qquad x_2 = -\sqrt{b}\,\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$

$\delta$) $x^2 - ax - b = 0$ $\qquad x_1 = \sqrt{b}\,\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{b}}{a}$

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{1 + \frac{4b}{a^2}} \qquad x_2 = -\sqrt{b}\,\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Równań $\alpha$) i $\beta$) nie można rozwiązać sposobem wyżej podanym, za pomocą funkcyj goniometrycznych, gdy $\frac{4b}{a^2} > 1$.

76) Rozwiązać następujące równania z pomocą funkcyj goniometrycznych i sposobem zwyczajnym.

a) $x^2 + 7{\cdot}386\,x + 8{\cdot}324 = 0$.

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{8{\cdot}324}}{7{\cdot}386}, \quad \alpha = 51^0\ 22'\ 24''$$

$$x_1 = -\sqrt{8{\cdot}324}\,\operatorname{tg} 25^0\ 41'\ 12'' = -1{\cdot}3877$$

$$x_2 = -\sqrt{8{\cdot}324}\,\operatorname{cotg} 25^0\ 41'\ 12'' = -5{\cdot}9982$$

b) $x^2 - 7{\cdot}386\,x + 8{\cdot}324 = 0$

c) $x^2 + \frac{37{\cdot}854}{1{\cdot}286}x - \frac{2{\cdot}341}{3{\cdot}968} = 0$

d) $x^2 - \frac{37{\cdot}854}{1{\cdot}286}x - \frac{2{\cdot}341}{3{\cdot}968} = 0$

87) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \sin x + \sin y = a \end{cases}$ $\qquad$ 78) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \sin x + \sin y = a \end{cases}$

79) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \cos x + \cos y = a \end{cases}$ $\qquad$ 80) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \cos x + \cos y = a \end{cases}$

81) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \sin x - \sin y = a \end{cases}$ $\qquad$ 82) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \sin x - \sin y = a \end{cases}$

83) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \cos x - \cos y = a \end{cases}$ $\qquad$ 84) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \cos x - \cos y = c \end{cases}$

85) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \sin x + \cos y = a \end{cases}$ 86) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \sin x + \cos y = a \end{cases}$

87) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \sin x - \cos y = a \end{cases}$ 88) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \sin x - \cos y = a \end{cases}$

89) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$ 90) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\sin y} = a \end{cases}$ 91) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$

92) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = a \end{cases}$ 93) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\cos y} = a \end{cases}$ 94) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \dfrac{\sin x}{\cos x} = a \end{cases}$

95) $\begin{cases} \sin x - \sin y = \dfrac{2}{5} \\ \cos x + \cos y = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ $\quad x = 92^0\ 55'\ 22''$, $\ y = 36^0\ 46'\ 38''$

Zamieniając strony pierwsze obu równań na iloczyny, a następnie dzieląc oba równania przez siebie, otrzymamy:

$$\operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \frac{8}{15} \quad \text{skąd} \quad \frac{x - y}{2} = 28^0\ 4'\ 22'$$

itd.

96) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1{\cdot}12 \\ \cos x + \cos y = 0{\cdot}85 \end{cases}$ $\quad x = 98^0\ 42'\ 14''$, $\ y = 7^0\ 33'\ 24''$

97) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1{\cdot}512 \\ \cos x - \cos y = -0{\cdot}864 \end{cases}$ 98) $\begin{cases} \sin x - \sin y = 0{\cdot}534 \\ \cos x - \cos y = -0{\cdot}872 \end{cases}$

99) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b \end{cases}$ 100) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a \\ \cos x - \cos y = b \end{cases}$

101) $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ \cos x + \cos y = b \end{cases}$ 102) $\begin{cases} \sin x - \sin y = a \\ \cos x - \cos y = b \end{cases}$

103) $\begin{cases} \sin x \sin y = a \\ \cos x \cos y = b \end{cases}$ 104) $\begin{cases} \sin x \sin y = 0{\cdot}46 \\ \cos x \cos y = 0{\cdot}17 \end{cases}$

105) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \sin x \sin y = a \end{cases}$ 106) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \cos x \cos y = a \end{cases}$

107) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \sin x \sin y = a \end{cases}$ 108) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \cos y \cos y = a \end{cases}$

109) $\begin{cases} x + y = 72^0\ 10' \\ \sin x \sin y = 0{\cdot}048 \end{cases}$ 110) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a \end{cases}$

111) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = a \end{cases}$ 112) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = a \end{cases}$

113) $\begin{cases} x - y = \alpha \\ \operatorname{tg} x = a \operatorname{tg} y \end{cases}$

114) $\begin{cases} x + y = 45^0 \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = 3 \end{cases}$ $\quad x = 32^0\ 51'\ 10''$, $\quad y = 12^0\ 8'\ 50''$

115) $\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \\ \cos^2 x - \sin^2 y = \dfrac{1}{4} \end{cases}$

$x_1 = 30^0 \quad x_2 = 150^0$
$y_1 = 45^0 \quad y_2 = 135^0$

116) $\begin{cases} a_1 \sin^2 x + b_1 \cos^2 y = c_1 \\ a_2 \cos^2 x + b_2 \sin^2 y = c_2 \end{cases}$

117) $\begin{cases} 15 \sin^2 x - 6 \cos^2 y = 5 \\ 20 \cos^2 x + 15 \sin^2 y = 13 \end{cases}$

118) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ a \cos x + b \cos y = c \end{cases}$

119) $\begin{cases} n_1 \cdot a^{\sin x} + p_1 \cdot b^{\sin y} = c_1 \\ n_2 \cdot a^{\sin x} + p_2 \cdot b^{\sin y} = c_2 \end{cases}$

120) $2^{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = 8$
$3^{\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg}^2 y} = 81$

znajdziemy: $\operatorname{tg} x = \dfrac{13}{6}$, $\operatorname{tg} = \dfrac{5}{6}$

skąd następnie wyrnaczy się x i y

121) $\begin{cases} 9^{\operatorname{tg} x} + {}^{\operatorname{tg} y} = 4 \\ 2^{\operatorname{cotg} x + 4 \operatorname{cotg} y} = 2 \end{cases}$

122) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{tg} z = a \\ xy\,(1 - \operatorname{tg} z) = b \\ x + y = c \end{cases}$

123) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy \operatorname{tg} z = 3 \\ xy\,(1 - \operatorname{tg} z) = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

# Wiadomości szkolne.

## I.

## Grono profesorów i nauczycieli
### z końcem roku szkolnego 1894/5.

### Dyrektor:

**Hugo Zathey**, doktor filozofii — (św. Jana l. 20.)

### Profesorowie:

**Roman Spitzer** — w VIII randze — (Retoryka 10). — Geografia w Ia, Ic, IVb, VI, VII; historya w IVb, VI, VII = 18 g.

**Karol Kunz** — w VIII randze — (Długa 58.) Chemia w IVa, IVb, Va, Vb, VI, VII; matematyka w Ib, Ic = 20 godz.

**Czesław Odrowąż Pieniążek** — w VIII randze — (Zielona 16). — Język polski w VI i VII, język niemiecki w IIc, IIIa = 17 g.

**Kajetan Kosiński** — w VIII randze — (Karmelicka 44). — Rysunki odręczne w IIb, IIIb, IVb, Va, Vb, VI = 21 g.

**Leon Piccard** — w VIII randze — (Karmelicka 33). — Rysunki odręczne w IIa, IIc, IIIa, IVa, VII = 19 g.

**Franciszek Jeziorski** — (Rynek 33). — Matematyka w IIa, VI, fizyka w IIIa, IIIb. VI = 20 g.

**Czesław Tomaszewicz** — (Wielopole 6). — Historya nat. we wszystkich klasach = 29 g.

**Stefan Grudziński** — (św. Gertrudy 5) — Język niem. IIa, Va, Vb, VI = 18 g.

**Jan Bidziński** — (Wielopole 6). — Matematyka w Va, Vb, VII; fizyka w IVa, IVb VII = 23 g.

**Ks. Franciszek Świderski** — Dr. św. Teologii — (Starowiślna 4). — Religia we wszystkich klasach = 28 g.

**Waleryan Krywult** — (Floryańska 2) — Historya i geografia w IIb, IIIa, IIIb i Va = 16 g.

**Hilary Hołubowicz** — (Topolowa 24). — Matematyka w IIb; Geometrya w IIa, IIb, IIc, Va, Vb, VI; rysunki odręczne w Ib; matematyka w Ib = 21 g.

### Nauczyciel pomocniczy:

**Bolesław Buszczyński**, doktor filozofii (Karmelicka 37) — Język franc. w IIIa, IIIb, IVa, IVb, Va, Vb = 22 g.

## Nauczyciele zastępcy:

**Michał Kozłowski**, doktor filozofii — (Marka 2). — Matematyka w Ia IIc, IIIb = 10 g.
**Stanisław Kępiński**, doktor filozofii, docent uniw. Jagiell. — (Wolska 5). — Matematyka, w IVa, IVb = 10 g.
**Władysław Bojarski** — (Szlak 55). — Język polski w Ia, IVa, Vb; geografia i historya w IVa, Vb = 18 g.
**Marceli Maternowski** — (Krótka 5). — Język polski w Ib, IIb; geografia w Ib = 10 g.
**Józef Szczudło** — (plac Matejki 2). — Język niemiecki w Ia, Ib, IIb; kaligrafia w Ia, Ib, Ic = 24 g.
**August Jasiński** — (Czysta 5). — Język niemiecki w IIIa, IVa, IVb, VII = 17 g.
**Józef Szczepański** — (św. Jana 26). — Język polski w IIa, IIc; niemiecki w Ic; geografia i historya w IIa, IIc = 20 g.
**Feliks Tobiczyk** — (Siemiradzkiego 9). — Matematyka w IIa; geometrya w IIIa, IIIb, IVa IVb, VII; Rys. odr. w Ic = 18 g.
**Adam Wołek** — (Pańska 9). — Język polski w Ic, IIIa, IIIb, IVb, Va = 16 g.
**Józef Bogacki**, asystent rys. odr. — (Krowoderska 122). — Rysunki odręczne w Ia, Ib — 8 g

## Nauczyciele przedmiotów nadobowiązkowych.

**Jerzy Gabryś**, proboszcz ewang. — Religia ewangelicka we wszystkich klasach.
**Dr. S. Landau**, rabin — Religia mojżeszowa we wszystkich klasach
**Roman Spitzer**, **Waleryan Krywult**, **Władysław Bojarski**, **Marceli Maternowski** — Historya kraju ojczystego.
**Józef Sierosławski**, nauka śpiewu.
Towarzystwo gimnastyczne „Sokół“ — gimnastyka we wszystkich klasach.

## Służba szkolna.

**Szczepan Jabłoński, Józef Jodłowski.**

# II.

# PLAN NAUK

(dla klas 1—6. nowy, dla 7 dawny).

---

## Przedmioty obowiązkowe.

### KLASA I. A., B., C.

Gospodarze: pp. Szczudło, Maternowski, Wołek.

**Religia.** 2 godziny tygodniowo. Zasady katolickiej wiary i moralności.

**Język polski.** 4 godziny tygodniowo. Czytanie wzorów według wypisów. Deklamacya. Należyte wygłaszanie z pamięci wzorowych utworów poetycznych, niekiedy ustępów prozaicznych. Gramatyka. Elementarna nauka o zdaniu pojedyńczem i o składni zgody najważniejsze zdania poboczne; poznanie ważniejszych znaków pisarskich. Deklinacya imion. Wypracowania piśmienne, 4 na miesiąc, a mianowicie: w pierwszem półroczu wyłącznie dyktaty, ułożone systematycznie, a obejmujące ważniejsze zasady i prawidła pisowni; w drugim półroczu naprzemian 2 dyktaty i wypracowania stylistyczne, szkolne i domowe.

**Język niemiecki.** 6 godzin tygodniowo. Czytanie; uczenie się na pamięć słów, zwrotów i całych ustępów; zdawanie sprawy z treści czytanych ustępów na podstawie stosownych pytań; tłómaczenia; rozmówki. Znajomość odmian regularnych i zasad składni; ćwiczenia ortograficzne. Co tydzień zadania szkolne. Tematy: dyktaty, ćwiczenia ortograficzne dla praktycznej wprawy, pisanie z pamięci ustępów memorowanych, retrowersye.

**Geografia.** 3 godziny tygodniowo. Wstępne pojęcia z geografii, o ile one uczniowi są potrzebne do zrozumienia mapy i o ile poglądowo wytłomaczyć się dadzą. Oro- i hydrograficzny przegląd części świata i poszczególnych państw przy nieustannej pomocy mapy.

**Arytmetyka.** 4 godziny tygodniowo. Wyjaśnienie układu dziesiątkowego liczb. Pierwsze cztery działania na liczbach całkowitych, oderwanych i mianowanych. Zasady podzielności liczb; największa wspólna miara i najmniejsza wspólna wielokrotność. Ułamki zwyczajne; ułamki dziesiętne. Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne i odwrotnie. Rachunek liczbami wielorakiemi.

**Historya naturalna.** 3 godziny tygodniowo. Nauka poglądowa. W 1. półroczu kręgowce przeważnie ssawce i ptaki; pewna ilość stosownie dobranych postaci innych gromad W 2. półr. bezkręgowce, szczególnie członkonogi a zwłaszcza owady; niektóre z najważniejszych i najbardziej znanych postaci z działu mięczaków i promieniaków.

**Rysunki odręczne.** 4 godziny tygodniowo. Nauka poglądowa. Rysowanie płaskich utworów geometrycznych i ornamentu geometrycznego z wolnej ręki ze szczególnem uwzględnieniem linii wygiętych. Pojęcia zasadnicze z nauki o przestrzeni i wyjaśnienie poglądowe kształtów brył elementarnych.

**Kaligrafia.** 2 godziny tygodniowo. Pismo zwykłe, łacińskie i niemieckie. Pismo rondowe.

### KLASA II. A., B., C.

Gospodarze: pp. Grudziński, Hołubowicz, Tomaszewicz.

**Religia.** 2 godziny tygodniowo. Dzieje starego zakonu z uwzględnieniem chronologii i geografii biblijnej.

**Język polski.** 3 godziny tygodniowo. Czytanie wzorów według wypisów jak w kl. I. Deklamacya jak w kl. I. Gramatyka. Elementarna nauka o zdaniu złożonem. Powtórzenie

deklamacyi imion, odmiana słów. Nauka pisowni i interpunkcyi uzupełniona i rozszerzona. Ćwiczenia ortograficzne jak w kl. I. Wypracowania piśmienne: 3 na miesiąc, naprzemian dyktat, zadanie szkolne i domowe.

**Język niemiecki**. 6 godzin tygodniowo. Zdawanie sprawy z czytanych ustępów na podstawie stosownych pytań, retrowersya; dłuższe rozmówki, memorowanie słówek, zwrotów i całych ustępów. Powtórzenie odmiany regularnej, poznanie najważniejszych wyjątków, Co tydzień wypracowanie piśmienne (z tych co miesiąc jedno domowe). Tematy jak w klasie I.

**Geografia**. 2 godziny tygodniowo. Szczegółowa geografia Azyi i Afryki jakoteż krajów południowo- i zachodnio-europejskich

**Historja**. 2 godziny tygodniowo. Dzieje starożytne, głównie Greków i Rzymian, ze szczególnem uwzględnieniem materyału mitycznego i biograficznego.

**Arytmetyka** 3 godziny tygodniowo. Mnożenie i dzielenie skrócone. Najważniejsze wiadomości z nauki o miarach, wagach i pieniądzach. Zamiana miar, wag i pieniędzy. Rozwiązywanie zagadnień prostych i złożonych za pomocą wnioskowania. Nauka o stosunkach, proporcyach i jej zastosowania, a mianowicie: reguła trzech, rachunek procentu prostego, dyskontu i terminu, rachunek podziału, spółki i rachunek mięszaniny.

**Historya naturalna**. 3 godziny tygodniowo. Nauka poglądowa. W 1. półroczu mineralogia, a mianowicie spostrzeganie i opisywanie niewielkiej ilości gatunków minerałów bez szczególnego uwzględniania systematyki: przy sposobności należy zwracać uwagę na najzwyklejsze składy. W 2. półr. botanika, a mianowicie spostrzeganie i opisywanie pewnej ilości roślin nasiennych rozmaitych rodzin; powolne wprowadzanie pojęć o niektórych rodzinach według systemu naturalnego, nadto niektóre rośliny zarodnikowe.

**Geometrya i rysunki geometryczne**. 3. godziny tygodniowo. *a*) *Geometrya* (2 godz. tygodn.). Na podstawie wiadomości zasadniczych, nabytych w kl. I. przy rysunku odręcznym. nauka o przystawaniu trójkątów i równoległoboków, dzielenie odcinków. Najprostsze twierdzenia o cięciwach i stycznych do koła, o kątach obwodowych i kątach środkowych. Nauka o wielokątach wpisanych i opisanych na kole. Stosunek dwu odcinków proporcyalność czterech odcinków. Podziałki zmniejszone i zwiększone. Podobieństwo trójkątów. *b*) *Rysunek geometryczny* (1 godz. tygodn.). Ćwiczenia w używaniu przyrządów rysunkowych w związku z przerobionym materyałem naukowym. Ornament geometryczny.

**Rysunki odręczne**. (4 godziny tygodniowo). Rysunek perspektywiczny z wolnej ręki według modeli z drutu i z drzewa. Rysowanie łatwych ornamentów płaskich w konturach

## KLASA III. A., B.

Gospodarze: pp, Tobiczyk, Jasiński.

**Religia**. 2 godziny tygodniowo. Żywot Pana Jezusa i dzieje apostolskie również z uwzględnieniem chronologii i geografii biblijnej.

**Język polski**. 3 godziny tygodniowo. Czytanie wzorów według wypisów. Czytanie, objaśnianie i zdawanie sprawy, jak w kl. I. i II. Krótkie wiadomości o życiu i pismach celniejszych pisarzy, z których dzieł wyjątki właśnie się czyta. Deklamacya jak w kl. I. Gramatyka: Przysłówki, spójniki, przyimki. Składnia rządu. Prawidła pisowni. Wypracowania piśmienne: 2 na miesiąc, naprzemian szkolne i domowe.

**Język niemiecki**. 5 godzin tygodniowo. Swobodniejsza reprodukcya czytanych ustępów prozaicznych i poetycznych; uwzględnienie synonimów. (zwrotów, podobną myśl wyrażających); uczenie się na pamięć. Systematyczna gramatyka w zakresie nauki o formach i składni rządu. Co miesiąc 3 zadania (2 szkolne, 1 domowe) Tematy: retrowersye, reprodukcye ustępów w szkole czytanych, streszczenia.

**Język francuski**. 4 godziny tygodniowo. Nauka czytania; memorowanie słówek, zwrotów i zdań; retrowersya i rozmówki. Najważniejsze prawidła odmian regularnych (rodzajnika, rzeczownika, przymiotnika, zaimka). Słowa posiłkowe: główne zasady konjugacyi

regularnej; tworzenie najważniejszych czasów złożonych. W 1 półr. co tydzień krótki dyktat w ścisłym związku z wziętymi ustępami. W 2. półroczu co 4 tygodnie dwa dyktaty i jedno wypracowanie szkolne. Tematy do dyktatów jak w 1. półroczu; do zadań szkolnych. pisanie z pamięci memorowanych ustępów, retrowersye.

**Geografia**. 2 godziny tygodniowo. Szczegółowa geografia reszty panstw europejskich (z wyjątkiem monarchii austryacko-węgierskiej) Ameryki i Australii.

**Historya.** 2 godziny tygodniowo. Przegląd dziejów średniowiecznych aż do odkrycia Ameryki z uwzględnieniem monarchii austryacko-węgierskiej i kraju rodzinnego.

**Arytmetyka**. 3 godziny tygodniowo. Rachunek ułamkami peryodycznemi i liczbami niezupełnemi w granicach żądanej dokładności. Pierwsze cztery działania na liczbach ogólnych o jednym lub więcej wyrazach. Podnoszenie liczb dziesiętnych do kwadratu i sześcianu. Wyciąganie pierwiastków kwadratowego i sześciennego z liczb dziesiętnych. Ćwiczenia w rachowaniu liczbami szczególnemi w celu powtórzenia materyału arytmetycznego z klas niższych, a to przeważnie na zagadnieniach z życia praktycznego. Rachunek procentu składanego z używaniem odpowiednich tablic.

**Fizyka.** 3 godziny tygodniowo. Ogólne własności ciał: Rozciągłość, nieprzenikliwość, podzielność, dziurkowatość, ciężkość. Szczególne własności ciał: Stan skupienia, spójność, przyczepność, sprężytość. Nauka o cieple: Zmiana objętości, termometry, przewodzenie ciepła, zmiana stanu skupienia; ciepło topliwości i ciepło lotności, najważniejsze wiadomości o cieple promienistem. Magnetyzm: Magnesy naturalne i stuczne, wzajemne działanie magnesów na siebie, magnetyzowanie przez rozdział, pocieranie, magnetyzm ziemi, zboczenie i nachylenie magnetyczne, busola. Elektryczność: Elektryczność statyczna: stan elektryczny, elektryzowanie przez udzielanie i wpływ, elektroskop, przyrządy zgęszczające, elektrofor, maszyna elektryczna, elektryczność atmosferyczna. Galwanizm: Stosy z jednym płynem, działania termiczne prądu, wyjaśnienie elektrolizy, działania magnetyczne prądu, elektromagnesy, doświadczeuia elementarne z indukcyi elektrodynamicznej i magnetoelektrycznej, elektryczność termiczna. Akustyka: Powstawanie głosu, zasady nauki o ruchu falowym, prędkość przewodzenia fal, odbijanie się fal, powstawanie tonów w ogóle, wysosość tonu, brzmiące struny, pręty, płyty i piszczałki, odbrzmiewanie, narząd głosowy i narząd słuchowy.

**Geometrya i rysunki geometryczne**. 2 godziny tygodniowo. *a*) *Geometrya* (1 godz. tygodn.) Obliczanie powierzchni figur prostolinijowych. Twierdzenie Pitagorasa. Przekształcanie figur prostolinijowych Obwód i powierzchnia koła Najprostsze własności elipsy i paraboli, tyczące się utwarzania tych krzywych i prowadzenia stycznych do nich. *b*) *Rysunek geometryczny* (1 godz. tygodn.). Dalsze ćwiczenia w rysowaniu ornamentów geometrycznych.

**Rysunki odręczne**. 4 godziny tygodniowo. Rysunek perspektywiczny z wolnej ręki według modeli drewnianych, tudzież grup takich modeli. Rysowanie i malowanie ornamentów płaskich z okresu starożytności klasycznej i z wieków średnich. Ćwiczenia w rysowaniu z pamięci prostych kształtów bryłowych i ornamentalnych.

## KLASA IV A., B.

Gospodarze: pp. Buszczyński, Kosiński.

**R ligia**. 2 godziny tygodniowo. Wyjaśnienie ważniejszych obrzędów kościelnych z podaniem powodu i czasu ich wprowadzenia.

**Język polski.** 3 godziny tygodniowo. Czytanie wzorów jak w kl. III. Oprócz tego listy i inne zwyklejsze pisma praktyczne. Deklamacya jak w kl I. Gramatyka: Składnia w obrębie czasownika Systematyczna nauka w zdaniach złożonych i okresach. Powtórzenie całego materyału gramatycznego w ogólniejszych zarysach Ćwiczenia piśmienne jak w kl. III.

**Język niemiecki.** 4 godziny tygodniowo. Reprodukcye jak w kl. III.; uczenie się na pamięć. Systematyczna gramatyka w zakresie nauki o zdaniu; uzupełnienie składni rządu.

Co miesiąc 3 zadania (2 szkolne, 1 domowe). Tematy: retrowersye, reprodukcye opowiadania, opisy, listy.

**Język francuski** 3 godziny tygodniowo. Zdawanie sprawy z treści czytanych ustępów na podstawie stosowanych pytań; retrowersye; dłuższe rozmówki; memorowanie słówek, zwrotów i całych ustępów. Powtórzenie i uzupełnienie odmian regularnych (przymiotnika, liczebnika, zaimka); nauka o przysłówku i przyimku; najzwyklejsze czasowniki nieregularne. Co 4 tygodnie jeden dyktat, jedno zadanie szkolne i jedno domowe. Tematy do wypracowań jak w kl. III. przy cokolwiek zwiększonych wymaganiach.

**Geografia.** 2 godziny tygodniowo. Szczegółowa geografia monarchii austryacko-węgierskiej i kraju rodzinnego.

**Historja.** 2 godziny tygodniowo. Dzieje nowożytne od odkrycia Ameryki z uwzględnieniem historyi monarchii austryacko-węgierskiej i kraju rodzinnego.

**Arytmetyka.** 5 godzin tygodniowo. *a) Arytmetyka ogólna.* Nauka o czterech pierwszych działaniach głównych, przeprowadzona na zasadach ścisłych. Prawa zasadnicze podzielności liczb. Teorya największej wspólnej miary i najmniejszej wspólnej wielokrotności, zastosowana do wielomianów. Nauka o ułamkach zwyczajnych Zamiana ułamków zwyczajnych na dziesiętne i odwrotnie. Uzasadnienie dokładne rachunku ułamkami dziesiętnymi, a w szczególności skróconego mnożenia i dzielenia Nauka o stosunkach i proporcyach z zastosowaniami. Nauka o równaniach stopnia pierwszego o jednej i więcej niewiadomych z zastosowaniem do rozwiązywania ważniejszych zagadnień praktycznych. *b) Planimetrya.* Pojęcia zasadnicze geometryi. Linia prosta (promień odcinek), kąt, jego rodzaje i pomiar. Proste równoległe, koło, jego promień, cięciwa, średnica, sieczna, styczna, odcinek i wycinek. Trójkąt, wielokąt. Przystawanie figur płaskich i wynikające stąd własności tychże figur. Twierdzenia o kole, których dowodzenie polega na przystawaniu. Proporcyonalność odcinków. Podobieństwo figur prostolinijowych i wynikające stąd własności tychże figur. Twierdzenia o kole, których dowodzenie polega na podobieństwie

**Fizyka.** 3 godziny tygodniowo. Mechanika: Ruch prostolinijowy, równoległobok prędkości, składanie i rozkładanie sił, spadanie, określenie siły jako iloczynu masy i przyśpieszenia, rozszerzenie nauki o ciężkości ciał, środek ciężkości, dźwignia, belka wagi, wahadło proste, ruch centralny, siła odśrodkowa, przeszkody ruchu. Okazanie praw równowagi na maszynach prostych. Okazanie praw zasadniczych hidrostatyki zapomocą przyrządów, zasada Archimedesa, ciężar właściwy, gęstość względna, areometr podziałkowy, ciśnienie reakcyjne. Doświadczenie Torrcicellego, barometry, prawo Mariotta, pompa pneumatyczna, prężność par, maszyna parowa. Optyka geometryczna: Przewodzenie światła w liniach prostych, cień fotometry, prawo odbicia, odbicie na zwierciadłach, załamanie światła, rozszczepienie światła, soczewki, wykreślanie obrazów w soczewkach dwuwypukłych i dwuwklęsłych, ciemnia optyczna, oko, warunki widzenia wyraźnego, okulary, lupa, mikroskop, najprostsze lunety, widmo słoneczne, linie Fraunhofera.

**Chemia.** 2 godziny tygodniowo. W 1 półroczu: Wiadomości wstępne Wodór. Chlorowce. Tlen i grupa siarkowców (siarka, selen i tellur); grupa azotowców (azot, fosfor, arsen-antymon) W 2. półroczu: bor, węgiel i krzem, metale alkaliczne i metale ziem alkalicznych.

**Geometrya i rysunki geometryczne.** 3 godziny tygodniowo. *a) Geometrya.* (1 godz. tygodn.), Nauka o wzajemnem położeniu prostych i płaszczyzn w przestrzeni, o ile ona znajdzie zastosowanie w geometryi wykreślnej. Graniastosłup, ostrołup, walec, stożek i kula. Obliczanie powierzchni i objętości tych brył. *b) Rysunek geometryczny* 1 (godz. tygodniowo. Konstrukcya elipsy i paraboli. Rysowanie z poglądu brył stereometrycznych w rzucie poziomym i pionowym.

**Rysunki odręczne.** 3 godziny tygodniowo. Rysunek perspektywiczny z wolnej ręki prostych naczyń i części architektonicznych. Rysowanie i malowanie ornamentów płaskich w stylu odrodzenia i w stylu wschodnim. Rysowanie ornamentów plastycznych we-

dług modeli gipsowych. Ćwiczenia w rysowaniu z pamięci brył i typowych kształtów ornamentalnych.

## KLASA V A., B.

Gospodarze: pp. Krywult, Bojarski.

**Religia.** 2 godziny tygodniowo. W 1. półroczu historyczny przegląd głównych źródeł katolickiej nauki wiary i moralności. W 2 półroczu dogmatyka katolicka.

**Język polski.** 3 godziny tygodniowo. Czytanie wzorów. Poznanie celniejszych a charakterystycznych ustępów z dzieł autorów klasycznych (greckich i rzymkisch) na podstawie wzorowych przykładów Uzupełnienie wiadomości o najważniejszych gatunkach poezyi i prozy, nabytych już w klasach poprzednich. Czytanie celnieiszych dzieł literatury polskiej wieku XVI Obowiązkowa lektura domowa. Deklamacya jak w kl. I. Wypracowania stylistyczne: 7 na półrocze, naprzemian szkolne i domowe

**Język niemiecki.** 4 godziny tygodniowo. Ćwiczenia w reprodukcyi szczegółowej lektury nowszych pisarzów, przeważnie prozaicznej. Memorowanie (deklamacya . Obowiązkowa lektura domowa. Uzupełnienie wiadomości gramatycznych (ze składni rządu, zdania i szyku). Co miesiąc 2 zadania (naprzemian domowe i szkolne). Tematy: streszczenia czytanych ustępów, opowiadania, opisy, przekłady z języka polskiego (na zadania szkolne).

**Język francuski.** 3 godziny tygodniowo. Zdawanie sprawy z treści czytanych ustępów na stosowne pytania; dłuższe rozmówki; próby samodzielnej reprodukcyi czytanych ustępów; memorowanie zwrotów, zdań i całych ustępów. Uzupełnienie nauki o odmianiach. Czasowniki nieregularne, niezupełne i nieosobowe; spójniki. Składnia rządu; składnia w obrębie czasownika (tryby i czasy). Co 4 tygodnie jedno zadanie szkolne i jedno domowe. Tematy jak w klasach poprzednich: krótkie swobodne opowiadania; przekłady z języka wykładowego na język francuski.

**Geografia.** 1 godzina tygodniowo. Najważniejsze wiadomości o płodach surowych, komunikacyi i przemyśle państ pozaeuropejskich na podstawie poznania tychże topicznego i fizyczno geograficznego.

**Historya.** 3 godziny tygodniowo. Dzieje starożytne, a zwłaszcza Greków i Rzymian.

**Matematyka.** 5 godzin tygodniowo. *a) Arytmetyka ogólna.* Nauka o potęgach i pierwiastkach Liczby wymierne i niewymiernie, rzeczywiste i urojone. Nauka o logarytmach. Układ i użycie tablic logarytmowych. Równania stopnia 2. i równania dwukwadratowe o jednej niewiadomej. Przykłady równań stopnia 2. o dwu niewiadomych. Równania wykładnicze *b) Plamimetrya.* Równość, przekształcanie, podział i powierzchnia figur prostolinijowych. Wielokąty foremne wpisane i opisane na kole. Pomiar koła. *c) Trygonometrya płaska.* Funkcye goniometryczne i najgłówniejsze związki między niemi. Układ i użycie tablic trygonometrycznych. Twierdzenia zasadnicze o rozwiązywaniu trójkątów płaskich. Rozwiązywanie trójkątów prostokątnych i ukośnokątnych. Zastosowanie do niektórych przypadków złożonych i do rozwiązywania zagadnień z cyklometryi i geodezyi.

**Historya naturalna.** 3 godziny tygodniowo *Zoologia.* Najważniejsze wiadomości o budowie ciała ludzkiego i funkcyach jego organów. Kręgowce i ważniejsze gromady bezkręgowych z uwzględnieniem ich anatomii, morfologii i rozwoju, lecz pominięciem wszystkiego, co wkracza w zakres systematycznych szczegółów.

**Chemia.** 2 godziny tygodniowo. W 1. półr: Reszta metali: powtórzenie ważniejszych zasad teoretycznych W 2. półr.: węglowodory nasycone (parafiny) i połączenia pochodne, z nich wywiedzione, jak: alkohole jednoatomowe, kwasy tłuszczone, i t. p. Węglowodany.

**Geometrya wykreślna.** 3 godziny tygodniowo. Powtórzenie twierdzeń najważniejszych o wzajemnem położeniu prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Rozwiązywanie głównych zagadnień geometryi wykreślnej za pomocą rzutów prostokątnych, konstrukcya cieniów, rzucanych przez odcinki i figury płaskie przy oświetleniu równoległem, a mianowicie:

rzuty punktów i prostych na dwie i trzy rzutnie; ślad prostych, proste równoległe, przecinające się i skośne, ślady płaszczyzn, wyznaczenie śladów płaszczyzny, której położenie jest określone. Cień rzucony przez odcinek prosty. Figury płaskie i ich cień. Punkt przecięcia się prostej i płaszczyzny. Kąt nachylenia płaszczyzny do rzutni. Obrót punktu. Długość rzeczywista odcinka. Kład płaszczyzny. Wielkość rzeczywista figur. Prosta prostopadła do płaszczyzny. Rozmaite zagadnienia.

**Rysunki odręczne.** 3 godziny tygodniowo. Wyjaśnienie budowy głowy i twarzy ludzkiej, oraz ćwiczenia w rysowaniu głów według tablic ściennych, wzorów podręcznych i medalionów. Powtórzenie i dalszy ciąg materyału naukowego klas poprzednich. Przy sposobności wyjaśnienie porządków w architekturze starożytnej.

## KLASA VI.

Gospodarz: p. Spitzer.

**Religia.** 2 godziny tygodniowo. Etyka katolicka.

**Język polski.** 3 godziny tygodniowo. Czytanie wzorów. Poznanie celnielszych a charakterystycznych ustępów z autorów klasycznych (greckich i rzymskich) na podstawie wzorowych przekładów. Czytanie celniejszych dzieł literatury polskiej od początku XVII wieku do r. 1822. Mickiewicz. Poznanie nowożytnych gatunków poezyi i prozy. Ćwiczenia w wykładzie ustnym. Obowiązkowa lektura domowa. Deklamacya jak w kl. I. Wypracowania stylistyczne jak w kl. V.

**Język niemiecki.** 4 godziny tygodniowo. Pogląd na rozwój dawniejszej literatury niemieckiej aż do Klopstocka; dokładniejsza, na lekturze celniejszych dzieł oparta, znajomość epoki klasycznej od Klopstocka r. 1794, ze szczególnem uwzględnieniem Lessinga Herdera. Podanie zasad poetyki i stylistyki. Deklamacya; obowiązkowa lektura domowa. Co miesiąc 2 zadania (naprzemian szkolne i domowe). Tematy: opisy, tok myśli czytanych ustępów, łatwiejsze rozprawki, przekłady z języka polskiego (na zad. szkolne).

**Język francuski.** 3 godziny tygodniowo. Dokończenie nauki gramatycznej; zwroty imiesłowowe, zdania przysłówkowe. Czytanie większych ustępów z prozy powieściowej i opisowej; wzory poezyi epickiej i lirycznej; krótkie szkice biograficzne tych autorów z których dzieł wyjątki właśnie się czyta i ćwiczenia ustne Nauki udziela się w języku francuskim. Co 4 tygodnie jedno zadanie szkolne i jedno domowe. Tematy: swobodna reprodukcya przerobionych w szkole ustępów powieściowych; streszczanie ustępów większych; przerabianie poematów opisowych na prozę; listy; przekłady na język francuski w ścisłem zastosowaniu do pewnych prawideł składni, z zachowaniem zasady stopniowania, aż do przekładu dzieł orginalnych.

**Geografia.** 1 godzina tygodniowo. Tożsamo o państwach europejskich z wyjątkiem monarchii austryacko-węgierskiej.

**Historya.** 3 godziny tygodniowo Dzieje średniowieczne i nowożytne, aż do pokoju westfalskiego ze szczególnem uwzględnieniem historyi austryacko-węgierskiej i kraju rodzinnego.

**Matematyka.** 4 godziny tygodniowo. *a*) *Arytmetyka ogólna.* Ułamki ciągłe, ich wartości przybliżone. Równania nieoznaczone stopnia 1 i niektóre równania nieoznaczone stopnia 2 o dwu niewiadomych. Szeregi arytmetyczne. Postępy geometryczne. Zastósowanie do rachunku procentu składanego i rachunku rent. Nauka o połączeniach. Dwumian Newtona dla wykładników całkowitych i dodatnich. *b*) *Stereometrya.* Najważniejsze twierdzenia o wzajemnem położeniu prostych i płaszczyzn w przestrzeni. Zasadnicze własności naroży w ogólności, a w szczególności naroży trójściennych (naroża biegunowo odpowiednie). Przystawanie i symetrya. Graniastosłupy i ostrosłupy, ich własności ogólne i przystawanie. Obliczanie powierzchni i objętości graniastosłupów, ostrosłupów ostrosłupów ściętych i pryzmatoidy. Bryły foremne, walec, stożek i kula. *c*) *Trygonometrga sferyczna.* Zasadnicze własności trójkąta sferycznego (trójkąt biegunowo odpowiedni). Wzory zasadnicze do rozwiązywania trójkatów sferycznych prostokątnych i ukośnokątnych. Zastosowanie do niektórych zagadnień prostych ze stereometryi, geografii matematycznej i astronomii.

**Historya naturalna.** 2 godziny tygodniowo. *Botanika.* Poznanie gromad świata roślinnego w ich naturalnym porządku z uwzględnieniem ich budowy anatomiczno-morfologicznej, jakoteż fizyologii roślin w ogólności. Cechy najważniejszych gromad, z opuszczeniem wszystkiego co wchodzi w zakres szczegółów systematyki.

**Fizyka.** 3 godziny tygodniowo. Uzupełnienie wiadomości o własnościach ogólnych ciał, nabytych w klasach niższych, drobina, atom Stany skupienia, spójność, sprężystość i wytrzymałość. *Mechanika:* Statyka punktu materyalnego i punktów stale połączonych. moment siły, środek ciężkości, para sił, stałość podparcia, tarcie. Dynamika punktu materyalnego, praca mechaniczna, energia kinetyczna, ruch drgający punktu materyalnego, ruch krzywoliniowy, siła odśrodkowa, rzut pocisków. Dynamika punktów stale połączonych, ruch środka ciężkości, określenie momentu bezwładności. Wahadła fizyczne. Maszyny proste. Objaśnienie zasady prac przygotowanych na dźwigni. Przegląd najważniejszych zjawisk, polegających na obrocie ziemi. Ściśliwość płynów, napięcie

na powierzchni, rurki włoskowate. Ciśnienie hydrostatyczne, parcie płynów, równowaga ciał pływających. Areometr podziałkowy, prędkość wypływu. Ciśnienie powietrza, barometry. Prawo Mariotta i Gay Lussaca, zjawiska które na nich polegają. Pomiar barometryczny wysokości. Utrata ciężaru ciał w powietrzu. *Nauka o ruchu falowym.* Fale podłużne i fale poprzeczne. Prawo Huyghensa, najogólniejsze twierdzenia o odbijaniu, załamywania się i interferencyi fal. *Akustyka:* Powstawanie głosu, wyznaczanie wysokości tonu, skala tonów, brzmiące struny, pręty, płyty i powietrze. Odbijanie się i interferencya fal głosowych, tony kombinacyjne, barwa tonu. Narząd głosowy i narząd słuchowy.

**Chemia.** 2 godziny tygodniowo W 1 półr: Połączenia organiczne nienasycone. Ciała aromatyczne, glukosydy i alkaloidy. W 2 półr: Ciała białkowe. Zarys chemii fizylogicznej roślin i zwierząt.

**Ge metya wykreślna.** 3 godziny tygodniowo. Rzuty prostokątne graniastosłupów i ostrosłupów, przekroje płaskie tych brył i ich siatki. Cienie tych brył. Wykreślanie walców, stożków, i powierzchni obrotowych rzędu drugiego. Płaszczyzny styczne do tych powierzchni i wzajemne ich przenikanie się. Wyznaczanie cieniów tych powierzchni i granicy ich cieniów własnych.

**Rysunki odręczne.** 3 godziny tygodniowo. Rysowanie głów według płaskorzeźb wypukłych, masek i biustów, a w danym razie według wzorów. Powtórzenie i ciąg dalszy materyału naukowego klas poprzednich Przy sposobności wyjaśnienia kształtów architekturyi ornamentyki średniowiecznej.

## KLASA VII.

Gospodarz: p. Bidziński.

**Religia.** 2 godziny tygodniowo. Historya kościelna według książki Robitscha, tłómaczył Jachimowski.

**Język polski.** 3 godziny tygodniowo Czytanie arcydzieł literatury narodowej wieku XIX. od wystąpienia Brodzińskiego i Mickiewicza w dłuższych wyjątkach według wypisów lub w całości. Deklamacya jak w kl. V. Ćwiczenia ustne. Wypracowania stylistyczne co miesiąc, przeważnie domowe. Tematy w I. półroczu jak w klasie VI.; nadto na podstawie nauki języka ojczystego: czasem charakterystyki główniejszych osób w utworach; w II. półroczu także wyjaśnienia lub rozbiory głębszych zdań i przysłów lub mniejszych utworów w całości.

**Język niemiecki.** 4 godziny tygodniowo Objaśniano utwory najcelniejszych poetów, z poglądem na historyę literatury począwszy od Klopstocka. Jako podręcznik do lektury i tłumaczenia służyły Wypisy niemieckie Harwota II. tom Co 14 dni ćwiczenia piśmienne.

**Geografia.** 1 godzina tygodniowo. Geografia i statystyka monarchii austryacko-węgierskiej ze szczególnem uwzględnieniem stosunków handlowo-przemysłowych; książka jak w II. klasie i Dra Szaaniewicza: Opis monarchii austryacko-węgierskiej.

**Historya** 3 godziny tygodniowo. Historya nowsza od odkrycia Ameryki z uwzględnieniem dziejów monarchii austryackiej historyi polskiej. Podręcznik Gindelego III tom tłómaczył Markiewicz.

**Matematyka.** 5 godzin tygodniowo. Zrównanie stopnia trzeciego, zasady rachunku prawdopodobieństwa w zastosowaniu do ubezpieczenia na życie O szeregach stopnia wyższego, włącznie problemat interpelacyjny, o zbieżności i rozbieżności szeregów. Zastosowanie trygonometryi sferycznej do zadań stereometryi, w szczególności do sferycznej astronomii; analityczna geometrya płaska i powtórzenie przedmiotu klasy V. i VI. Co 14 dni zadanie szkolne.

**Fizyka.** 4 godziny tygodniowo. Akustyka, optyka, ciepło promieniste, elektryczność, magnetyzm. Główne zasady z geografii matematycznej i fizycznej, meteorologii i astronomii. Podręcznik Soleskiego.

**Historya naturalna.** 3 godziny tygodniowo. W półroczu I: Krystalografia i mineralogia. w półroczu II.: geognozya i geologia. Książka: Mineralogia Łomnickiego.

**Chemia.** 2 godziny tygodniowo. Dalszy ciąg chemii organicznej, mianowicie: alkohole i kwasy rodni dwu- i trójatomowych, związki aromatyczne, cukry barwiki, połączenia sinu, alkaloidy, ciała białkowate i powtórzenie przedmiotu z kl. V. i VI. Podręcznik jak w kl. Y.

**Geometrya wykreślna.** 3 godziny tygodniowo Konstrukcya cienia własnego i cienia rzuconego powierzchni obrotowych i brył złożonych. Nauka konstrukcyi obrazów perspektywicznych za pomocą metody przeźrocza i perspektywy wolnej przedmiotów technicznych. Powtórzenie przedmiotu wziętego w kl. V. i VI.

**Rysunki odręczne.** 4 godziny tygodniowo. Rysunek form ornamentalnych z zakresu architektury wzorów gipsowych i głowy z antyku.

## III. Wykaz książek szkolnych dla zakładu

| Klasa | Religia | Język polski | Język niemiecki | Język francuski | Geografia |
|---|---|---|---|---|---|
| I. | Katechizm większy dla szkół ludowych ks. Morawskiego. | Gramatyka Małeckiego wyd. VII. Wypisy polskie Próchnickiego i Wójcika tom I. wyd. I i II. | German-Petelenz: Ćwiczenia niemieckie dla kl. I. wyd I—III. | — | Benoni-Tatomir, wydanie IV, V i VI. |
| II. | Dąbrowski: Historya biblijna starego zakonu, wydanie I, II. i III. | Gramatyka Małeckiego wyd. VIII. Próchnicki i Wójcik Wypisy polskie na kl. II. Zipper: Mitologia wyjdzie w ciągu roku | German Petelenz: Ćwiczenia niemieckie dla kl. II. wyd. I i II | — | Baranowlki i Dziedzicki: Geografia powszechna wyd. IV—VII. |
| III. | Dąbrowski: Historya biblijna nowego zakonu, wydanie I i II. | Gramatyka Małeckiego wyd. VIII. Wypisy polskie Czubka i Zawilińskiego na kl. III. Mitologia jak w II kl. | Petelenz: Grmatyka. Wypisy: German-Petelenz dla kl. III. wyd. I i II. | J. Amborski: książka do nauki jęz. francuskiego część I. | jak w kl. II wydanie IV, V i VI. |
| IV. | Jachimowski: Liturgika katolicka. | Gramatyka Małeckiego wyd VIII. Wzory poezyi i prozy Fr. Próchnickiego Mitologia. jak II. w kl. | Petelenz: Gramatyka jak w kl. III. Wypisy: German-Petelenz dla klasy IV. | J. Amborski: książka do nauki jęz. francuskiego część II. | Benoni-Majerski: Geografia monarchii austr.-węgiers. wyd. II. |
| V. | Wappler-Świsterski: Nauka wiary katolickiej. | Tarnowski-Bohin: Wypisy dla szkół realn. Tom I. Zathey: Analogia grecka | Petelenz u. Werner: Deutsches-Lesebuch für die V. Classe. | J. Amborski: książka do nauki jęz. francnskiego część III. | jak. w kl. III. |
| VI. | Martin-Solecki: Etyka. Wyd. I i II. | jak w kl. V. | Petelenz u. Werner: Deutsches-Lesebuch fur die VII. Gymnasialcl. | jak w V. kl. | jak. w kl, III |
| VII. | Historya kościelna Wapplera. | Wypisy polskie Tarnowskiego i R. Bobina Część II. Antologia jak w kl. V. | Petelenz Werner: Lesebuch für für die VIII. Gymasialcl. | — | Hanak-Leniek: Historya i statystyka aust.-węgierskiej monarchii |

# przepisanych na rok szkolny 1895/6.

| Historya | Matematyka | Historya naturalna | Fizyka | Chemia | Geometrya wykreślna |
|---|---|---|---|---|---|
| — | Zajączkowski: Początki arytmetyki, część I, wyd. III. | Nowicki-Limbach: Zoologia wyd. VII w druku | — | — | — |
| Semkowicz: Opowiadania z dziejów powszechnych, część I. | jak w kl. I. | Łomnicki: Mineralogia, wydanie II i III. Rostafiński: Botanika szk. na kl. niższe, wyd. III w druku | — | — | Mocnik Maryniak: Geometrya poglądowa, część I. wyd. VI. |
| Semkowicz: Opowiadania z dziejów powszechnych, część II. Rawer, Dzieje ojczyste. | Zajączkowski: Początki arytmetyki i algebry, część II, wyd. II. | — | Kawecki-Tomaszewski: Fizyka dla niższych klas | — | Mocnik: Maryniak: Geometrya poglądowa, część II. wyd. III i IV. |
| Semkowicz: Opowiadania z dziejów powszechnych, częśé III. Rawer, Dzieje ojczyste. | Dziwiński: Zasady algebry. Mocnih - Stanecki: Geometrya wyd. III. Logarytmy Adama. | — | jak w III kl. | Wykład chemii ogólnej E. Bandrowskiego Część I. | jak w kl. III. |
| W. Zakrzewski: Historya powszechna, część I. | jak w IV. kl. | Petelenz: Zoologia dla wyższych klas szkół średnich. | — | — | Łazarski: Zasady geometryi wykreślnej. |
| Zakrzewski: Historya powzechna Część II. Lewicki: zarys dziejów Polski. | jak w IV kl. | Rostafiński: Botanika szkolna dla kl. wyższych. | Kawecki-Tomaszewski: Fizyka dla wyższych klas | — | jak w kl. V. |
| Gindely-Markiewicz: Dzieje nowożytne wyd. I i II. Lewicki jak w kl. VI. | jak w IV kl. | Łomnicki: Mineralogia i geologia, wyd. III. | jak w kl. VI | — | jak w kl. V. |

# IV.

# Tematy wypracowań piśmiennych.

## A. Zadania polskie.

### KLASA V A.

1. Treść „Przemowy Mikołaja Reya do poczciwego Polaka stanu rycerskiego“ (w skróceniu).
2. Opis ogrodu strzeleckiego.
3. Rozwinąć myśl zawartą w pieśni Jana Kochanowskiego: „Sława jedna zostaje po człowieku“.
4. Jakie znaczenie miały dla starożytnych Greków amfiktyonie?
5. Tok myśli w „Satyrze“ Jana Kochanowskiego.
6. O starożytnych budowlach u Egipcyan.
7. Jaki jest główny wątek kazania Skargi „O miłości ojczyzny“.
8. Podać tok myśli dyalogu „Antenor, Alexander“ i pierwszego chóru, oraz podać związek zachodzący między chórem, a dyalogiem z „Odprawy posłów greckich“.
9. Zima, jej przyjemności i biedy.
10. Treść trenu „XIX“ J. Kochanowskiego.
11. Wielki rynek krakowski.
12. Pożegnanie Hektora z Andromachą.
13. Znaczenie i zasługi X. Piotra Skargi.
14. Odysseus u Kiklopa Polifema. *A. Wołek.*

### KLASA V B.

1. Nasza wystawa i jej znaczenie.
2. Stanowisko Fenicyan w dziejach starożytnego wschodu.
3. „Nic nie może być szkodliwszego młodemu człowiekowi, jako nikczemne próżnowanie“ Rozwinąć myśl zawartą w dziele Reja: Żywot człowieka poczciwego.
4. Jakie czynniki powołały do życia literaturę polską w wieku szesnastym?
5. Jan Dęborog na nauce u księdza definitora.
6. Znaczenie Modrzewskiego w politycznej literaturze szesnastego wieku.
7. Zarys historyczny rozwoju demokracyi w Atenach
8. Rozwinąć myśl Kochanowskiego: „Zwycięstwo liczby nie chce, męstwa potrzebuje“.
9. O wpływie greckiej tragedyi na „Odprawę posłów“ Jana Kochanowskiego.
10. Znaczenie Konrada Wallenroda w naszej literaturze.
11. Obraz wewnętrznych stosunków w państwie rzymskiem w połowie drugiego stulecia przed Chrystusem.
12. Charakterystyka Podkomorzego w komedyi Niemcewicza „Powrót posła“
13. W jaki sposób Perykles w mowie na cześć poległych uzasadnia zdanie, że „Ateny są szkołą Hellady“?
14. Na czem polega powszechnodziejowe znaczenie cesarstwa rzymskiego?.

*Władysław Bojarski.*

## KLASA VI.

1, Dlaczego łacina była w wiekach średnich językiem piśmiennym?
2. Jak się ukoił żal Kochanowskiego po śmierci Urszulki?
3. Mili goście Piotra Zbylitowskiego.
4. Potem wyższego męża możesz poznać w tłumie,
Że on zawsze to tylko zwykł robić, co umie. *A. Mickiewicz.*
5. To miasto, świat zwalczywszy i siebie zwalczyło,
By nic niezwalczonego od niego nie było.
(*Z Epitahium Rzymowi Mikołaja Sępa Szarzyńskiego.*
6. Treść i znamiona charakterystyczne komedyi Piotra Baryki: „Z chłopa król“.
7. Tok myśli w wierszu Brodzińskiego: „Dziadek“.
8. Przyjemności życia na wsi i w mieście.
9. Jakie zarzuty czynił Skarga sejmom polskim?
10. Przez co obniża się poziom literatury w okresie czwartym?
11. Nie puszczaj się w studnię, aż wprzód upatrzysz, jako z niej wyleść!
(*A. M. Fredro*).
12. Treść satyry Krasickiego „Modna żona“.
13. Tok myśli w „Hymnie do Boga“ Woronicza.
14. Jak się Jan Śniadecki zapatruje na poprawność języka?

## KLASA VII.

1, Geneza „Grażyny“.
2. Gustaw w Dziadach.
3. Stanowisko Polski za Kazimierza Jagiellończyka.
4. Myśl przewodnia „Irydiona“.
5. „Pieśń o husarzach“ Józefa Szujskiego.
6. Polityka Stefana Batorego względem Moskwy.
7. Dlaczego teatr dopiero na schyłku XVIII wieku ustalił się w Polsce?
8. Niewdzięczność świata bywa często udziałem znakomitych ludzi.
9. Jaki sobie obiorę zawód i dlaczego?
10. Rozwinąć myśli, które się nasuwają, po przeczytaniu piątego ustępu „Pokutnika“ Stefana Witwickiego.
11. Wpływ Byrona na literaturę europejską.
12. J. I. Kraszewski i J. Korzeniowski jako powieściopisarze.

*Cz. Pieniążek.*

# B. Zadania niemieckie.

## KLASA V A i B.

1. Das Birkenreis (Eine Nacherzählung des Märchens).
2. Eine Uibersetzung aus dem Polnischen.
3. Der Zauberlehrling (Inhalt).
4. Der Nutzen des Wassers.
5. Das Waichnachtsfest, ein Freudenfest.
6. Eine Uibersetzung aus dem Polnichen.
7. Die Sage vom trojanischen Kriege.
8. Eine Uibersetzung aus dem Polnichen.
9. Thetis und Achilles. (Nacherzählung des poetischen Stückes).
10. Eine Uibersetzung aus dem Polnischen.
11. Ein Frühlingstag.

12 Major Tellheims Edelsien.
13. Spaziergang an einem Frühlingstage.
14. Eine Uibersetzung aus dem Polnischen.
15. Der Schild des Achilles.
16. Eine Uibersetzung aus dem Polnischen.

## KLASA VI.

1. Hildebrands Heinikehr.
2. Parzival auf der Gralburg.
3. Eine Uibersetzung aus dem Polnischen.
4. Hüons Reise nach Bagdad.
5. Der Zürchersee (Gedankengang der Ode).
6. Eine Uibersetzung aus dem polnichen Litteraturbuch).
7. Die Natur im Herbst.
8. Der Nutzen der Wälder.
9. Uibersetzung aus dem Polnischen.
10· Kaiphas erzählt seinen Traum im jüdischen Synedrium (aus Klopstocks Messiade).
11. Der Lehrling der Griechen (Gedankengang der gleichnamige Oden Klopstocks).
12. Wohlthätig ist des Teuers Macht.
13. Uibersetzung aus dem Polnischen.
14. Inhalt des I. Gesangens aus „Hermann und Dorothea".
15. Uibersetzung eines Litteraturstückes aus dem polnischen Lesebuch.
16. Miltons „Verlorenes Paradies" verglichen mit Klopstocks „Messias" in Bezug auf Inhalt und Form.
17. Uibertragung eines polnischen Übungsstückes ins Deutsche.

*S. Grudziński.*

## KLASA VII.

1. Eine Uibersetzung aus dem Polnischen.
2. Gedankengang in Schillers „Spaziergang".
3. Vorfabel zu Schillers „Braut von Messina".
4. Warum und wann werden die Głocken geläutet. (Nach Schillers „Lied von der Glocke").
5. Eine Uibęrsetzung aus dem Polnischen.
6. Der Einfluss der Musik auf den Menschen.
7. Grillparzer in Weimar.
8. Ein Spaziergang im Herbst.

*A. Jasiński.*

## C. Egzamin dojrzałości.

**Zadanie polskie:** Charaktery najgłówniejszych postaci w utworach Mickiewicza.

**Zadanie polsko-niemieckie:** „Zgon rycerza". Wypisy polskie dla kl. IV szkół gimnazyalnych i realnych, ułożył Jan Czubek i Roman Zawiliński. Lwów 1894. str. 123aż do słów: Noc była ciepła ale chmurna.

**Zadanie niemiecko-polskie:** „Die Ausgrabungen in Pompeji". Petelenz — Werner. Deutsches Lesebuch. Fünfte Classe. Lemberg 1892. S. 236, bis zu den Worten: In neuster Zeit ist dies anders.

**Zadania matematyczne:** 1. Znaleść powierzchnię kwadratu, wpisanego w elipsę: $25x^2 - 14xy + 25y^2 - 50 = 0$.

2. Jaka jest szerokość geograficzna takiego miejsca, gdzie dzień przy zboczeniu słońca 10° 14' jest tak długi, jak w Krakowie 21 czerwca.

3. Kapitał 4500 zł. umieszczony na procencie składanym po 4%, powiększa się przy końcu każdego roku o 200 zł. Jaka będzie wartość całej sumy po 10 latach?

**Zadania z geometryi wykreślnej:** (Przez punkt M poprowadzić płaszczyznę równoległą do danej prostej L a pod ∢ 60° do jednej z płaszczyzn rzutów nachyloną.

2. Wyznaczyć cień własny i rzucony kuli opisanej na sześcianie o danej długości krawędzi.

3. Wykreślić perspektywę stożka, którego oś jest nachylona do tła pod danym kątem, a podstawa znajduje się na danej płaszczyźnie.

---

# V.

# Przedmioty nadobowiązkowe.

1. **Historya kraju rodzinnego** w 7 oddziałach po jednej godz. tygodn. Uczestniczyli w nauce tego przedmiotu wszyscy uczniowie klas III a, b i c, IV a i b, VI i VII. Książka: Dra Lewickiego Zarys historyi Polski. Remuneracya 350 złr.

2. **Śpiew** w dwóch oddziałach po dwie godyiny tygodniowo. Liczba uczniów 92. Remuneracya 200 złr.

3. **Gimnastyka** w 2 oddziałach po dwie godziny tygodniowo. Liczba uczniów: Oddział I (kl. I abc i IIabc) 112; oddział II (III—VII) 85; razem 197. Remuneracya 300 złr. i 100 złr. za przyrządy i salę.

---

# VI.

# ZAPISKI STATYSTYCZNE.

(Liczba dodana z góry oznacza prywatystów).

| | W KLASIE | | | | | | | | | | | | | | | Razem |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I. | | | II. | | | III. | | | IV. | | V. | | VI. | VII | |
| | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | a | b | | | |
| **1. Liczba uczniów.** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Z końcem roku szkolnego 1893/94 | 28 | 40 | 33 | 29$^{1}$ | 33$^{1}$ | 22$^{1}$ | 32$^{2}$ | 32$^{4}$ | 21$^{2}$ | 34$^{1}$ | 32$^{3}$ | 30 | — | 38$^{1}$ | 20 | 424$^{16}$ |
| Z początkiem roku szkolnego 1894/95 | 35 | 49 | 54 | 39$^{1}$ | 42 | 32 | 37 | 44 | — | 36 | 40 | 28 | 25 | 23$^{1}$ | 29$^{5}$ | 513 |
| W ciągu roku wstąpiło | 1 | 1 | 1 | — | 1 | 1 | — | 1 | — | 1 | 1 | — | 2 | 1 | 1 | 12 |
| Ogółem więc przyjęto | 36 | 50 | 55 | 39$^{1}$ | 43 | 33 | 37 | 45 | — | 37 | 41 | 28 | 27 | 24$^{1}$ | 30$^{5}$ | 525 |
| Między tymi przybyło nowych: | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a) z promocyą z niższej klasy | 35 | 49 | 51 | 5 | 5 | 1 | 1 | 3 | — | 5 | 1 | — | 2 | 1 | 1 | 160 |
| b) repetentów | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Z tutejszego zakładu przyjęto: | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a) z promocyą z niższej klasy: | — | — | — | 27$^{1}$ | 34 | 30 | 34 | 39 | — | 28 | 38 | 25 | 20 | 19$^{1}$ | 29$^{5}$ | 323 |
| b) repetentów | 1 | 1 | 4 | 7 | 4 | 2 | 2 | 3 | — | 4 | 2 | 3 | 5 | 4 | — | 42 |
| W ciągu roku wystąpiło: | 5 | 6 | 19 | 6 | 1 | 10 | 7 | 5 | — | 1 | 4 | 2 | 1 | — | — | 67 |
| Liczba uczn. z końcem r. szk. 1894/5 | 31 | 44 | 36 | 33$^{1}$ | 42 | 23 | 30 | 40 | — | 36 | 37 | 26 | 26 | 24$^{1}$ | 30$^{5}$ | 458 |
| między tymi a) publicznych | 31 | 44 | 36 | 33 | 42 | 23 | 30 | 40 | — | 36 | 37 | 26 | 36 | 24 | 30 | 458 |
| b) prywatnych | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| **2, Miejsce urodzenia (kraj).** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| W. ks. Krakowskie | 14 | 22 | 10 | 16$^{1}$ | 20 | 6 | 20 | 16 | — | 16 | 16 | 9 | 11 | 8 | 15$^{2}$ | 199 |
| Galicya | 15 | 10 | 15 | 12 | 12 | 12 | 7 | 8 | — | 12 | 16 | 11 | 11 | 15$^{1}$ | 11$^{1}$ | 167 |
| Bukowina | 2 | — | — | — | 1 | — | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | 4 |
| Szlask | — | — | 1 | 1 | 1 | — | — | 1 | — | — | 1 | — | — | — | — | 5 |
| Morawy | — | 1 | — | — | 1 | 1 | 1 | — | — | 1 | — | 1 | — | — | — | 6 |
| Czechy | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| Austrya dolna | — | — | — | 1 | — | — | — | 1 | — | 1 | — | — | — | — | — | 3 |
| Austrya górna | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | 1 |
| Królestwo polskie | — | 7 | 9 | 3 | 6 | 3 | 2 | 10 | — | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4$^{2}$ | 53 |
| Podole | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | 2 | — | — | — | 3 |
| Wołyń | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| Ukraina | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — | 1 |
| Litwa | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 1 | — | — | — | — | 3 |
| Rumunia | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — | 2 |
| W. ks. Poznańskie | — | 1 | — | — | 1 | — | — | 1 | — | — | — | 1 | 1 | — | — | 5 |
| Niemcy | — | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| Francya | — | — | — | — | — | 1 | — | 1 | — | — | 1 | — | — | — | — | 3 |
| Razem | 31 | 44 | 36 | 33$^{1}$ | 42 | 23 | 30 | 40 | — | 36 | 37 | 26 | 26 | 24$^{1}$ | 30$^{5}$ | 458 |

| | W KLASIE | | | | | | | | | | | | | | | Razem |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I. | | | II. | | | III. | | | IV. | | V. | | VI. | VII | |
| | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | a | b | | | |
| **3. Narodowość.** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Polaków . . . . . . . . . | 28 | 42 | 36 | $33^{1}$ | 38 | 23 | 30 | 39 | — | 36 | 36 | 25 | 26 | $23^{1}$ | $29^{5}$ | 444 |
| Rusinów . . . . . . . . . | 1 | 1 | — | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 3 |
| Czechów . . . . . . . . . | 2 | — | — | — | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 3 |
| Niemców . . . . . . . . | — | 1 | — | — | 2 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 4 |
| Francuzów . . . . . . . . | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 1 | — | 1 | — | 4 |
| Razem . . | 31 | 44 | 36 | $33^{1}$ | 42 | 23 | 30 | 40 | — | 36 | 37 | 26 | 26 | $24^{1}$ | $30^{4}$ | 458 |
| **4. Wyznanie.** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Obrzadku rzymsko-kat. . | 22 | 31 | 32 | $26^{1}$ | 37 | 19 | 27 | 35 | — | 34 | 34 | 20 | 22 | $22^{1}$ | $24^{3}$ | 385 |
| „ grecko-kat. . . | 1 | 1 | — | — | 1 | 1 | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | 5 |
| Ewang. wyzn. ausburgsk. | — | 1 | 1 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | 3 |
| Mojżeszowego . . . . . . | 8 | 11 | 3 | 7 | 4 | 3 | 3 | 5 | — | 2 | 3 | 5 | 4 | 2 | $5^{2}$ | 65 |
| Razem . . | 31 | 44 | 36 | $33^{1}$ | 42 | 23 | 30 | 40 | — | 36 | 37 | 26 | 26 | $24^{1}$ | $30^{5}$ | 458 |
| **5. Wiek uczniów.** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 11 lat mają . . . . . . | 7 | 15 | 7 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 29 |
| 12 „ „ . . . . . . | 5 | 14 | 12 | 4 | 8 | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 43 |
| 13 „ „ . . . . . . | 11 | 8 | 8 | 6 | 17 | 5 | 4 | 10 | — | — | — | — | — | — | — | 69 |
| 14 „ „ . . . . . . | 4 | 3 | 7 | $14^{1}$ | 11 | 5 | 6 | 11 | — | 2 | 4 | — | — | — | — | 67 |
| 15 „ „ . . . . . . | 4 | 4 | 2 | 6 | 4 | 7 | 6 | 8 | — | 11 | 9 | 8 | 4 | — | — | 73 |
| 16 „ „ . . . . . . | — | — | — | 3 | 2 | 5 | 10 | 5 | — | 12 | 10 | 8 | 7 | — | — | 62 |
| 17 „ „ . . . . . . | — | — | — | — | — | 1 | 4 | 3 | — | 9 | 10 | 7 | 11 | 6 | 1 | 52 |
| 18 „ „ . . . . . . | — | — | — | — | — | — | — | 2 | — | 2 | 4 | 3 | 3 | 5 | $8^{1}$ | 27 |
| 19 „ „ . . . . . . | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | — | — | — | 1 | $7^{1}$ | $7^{1}$ | 16 |
| 20 „ „ . . . . . . | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 5 | $9^{2}$ | 14 |
| 21 „ „ . . . . . . | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | $4^{1}$ | 5 |
| 22 „ „ . . . . . . | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 |
| Razem . . | 31 | 44 | 36 | $33^{1}$ | 42 | 23 | 30 | 40 | — | 36 | 37 | 26 | 26 | $24^{1}$ | $30^{5}$ | 458 |
| **6. Według miejsca zamieszkania rodziców.** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Miejscowych . . . . . . | 20 | 32 | 29 | $18^{1}$ | 27 | 12 | 24 | 25 | — | 23 | 26 | 16 | 17 | $19^{1}$ | $19^{2}$ | 307 |
| Zamiejscowych . . . . . | 11 | 12 | 7 | 15 | 15 | 11 | 6 | 15 | — | 13 | 11 | 10 | 9 | 5 | $11^{3}$ | 151 |
| Razem . . | 31 | 44 | 36 | 33 | 42 | 23 | 30 | 40 | — | 36 | 37 | 26 | 26 | $24^{1}$ | $30^{5}$ | 458 |

| | W KLASIE | | | | | | | | | | | | | | | Razem |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I. | | | II | | | III. | | | IV. | | V. | | VI. | VII | |
| | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | a | b | | | |
| **7. Klasyfikacya.** | | | | | | | | | | | | | | | | |
| a) Z końcem r. szk. 1894/95. | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I. stopień z odznaczeniem | 2 | 3 | — | 1 | 2 | — | 2 | 3 | — | — | 2 | 1 | 1 | — | — | 17 |
| I stopień . . . . . . . | 24 | 32 | 27 | 26 | 30 | 16 | 23 | 26 | — | 29 | 24 | 19 | 14 | 20 | 30 | 340 |
| Do egzaminu poprawczego po wakacyach przeznaczono . . . . . . . . | — | 4 | 3 | 3 | 4 | 2 | 5 | 7 | — | 2 | 3 | 3 | 10 | 3 | — | 49 |
| II stopień . . . . . . . | 1 | 3 | 3 | 1 | 4 | 4 | — | 3 | — | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 | — | 29 |
| III. stopień . . . . . . . | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | — | 1 | — | 2 | 4 | — | — | — | — | 21 |
| Nie klasyfikowano . . . | — | — | — | — | — | — | — | — | — | 1 | — | 1 | — | — | — | 2 |
| b) Dodatek do r. szk. 1894/95. | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Pozwolono poprawić egzamin po wakacyach . . | 5 | 2 | 1 | 3 | 4 | — | 1 | 2 | $2^{1}$ | 4 | 4 | 8 | — | 4 | 1 | $41^{1}$ |
| Złożyło egzamin . . . . | 5 | 2 | 1 | 3 | 4 | — | 1 | 2 | $2^{1}$ | 4 | 4 | 8 | — | 4 | 1 | $41^{1}$ |
| Nie złożyło egzaminu . . | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Nie zgłosiło się . . . . . | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — | — |
| Zatem ostateczny wynik klasyfikacyi z r. szk. 1893/94. | | | | | | | | | | | | | | | | |
| I. stopień z odznaczeniem | 3 | 1 | 2 | — | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | — | — | — | — | 1 | 18 |
| I. stopień . . . . . . . | 23 | 35 | 23 | 22 | $24^{1}$ | $13^{1}$ | $23^{1}$ | $27^{4}$ | $17^{2}$ | $28^{1}$ | $26^{2}$ | 21 | — | $34^{1}$ | 18 | $334^{13}$ |
| II. stopień . . . . . . . | 1 | 2 | 4 | $6^{1}$ | 5 | 2 | $4^{1}$ | 2 | 1 | 4 | $5^{1}$ | 6 | — | 4 | 1 | $47^{3}$ |
| III stopień . . . . . . . | 1 | 2 | 4 | 1 | — | 6 | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 | 3 | — | — | — | 25 |
| Nie klasyfikowano . . . | 5 | 5 | 10 | 10 | 8 | 14 | 3 | 2 | 13 | 2 | 3 | 5 | — | 3 | — | 82 |
| Razem . . | 33 | 45 | 43 | $39^{1}$ | $41^{1}$ | $36^{1}$ | $35^{2}$ | $33^{4}$ | $34^{2}$ | $36^{1}$ | $35^{3}$ | 35 | — | $41^{1}$ | 20 | $506^{16}$ |

## 8. Opłata szkolna wynosiła:

a) za pierwsze półrocze 1894/5 . . . . . . . . . . . . 4440 złr.
b) za drugie półrocze . . . . . . . . . . . . . . . . 4420 „
Razem . . 8860 „

## 9. Wykaz uczniów pobierających stypendya:

| L. | Imię i nazwisko ucznia | Klasa | Nazwa fundacyi | Kwota w złr. | Kwota w ct. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Drozdowski Zygmunt | II b. | Kaspra Zubowskiego | 150 | — |
| 2 | Schrott Tadeusz | III a. | dto | 150 | — |
| 3 | Kwiatkowski Ludwik | III b. | dto | 150 | — |
| 4 | Skibka Władysław | III b. | dto | 150 | — |
| 5 | Nowakowski Tadeusz | IV a. | Karola Skibińskiego | 100 | — |
| 6 | Biliński Wacław | V a. | Franc. Zawadzkiego | 157 | 50 |
| 7 | Dudek Henryk | V a. | Sarbowe | 100 | — |
| 8 | Żurowski Jan | V a. | Andrzeja Żelchockiego | 115 | 50 |
| 9 | Makowski Romuald | V b. | Kaspra Zubowskiego | 150 | — |
| 10 | Münnich Stanisław | V b. | Stanisława Ładuńskiego | 266 | — |
| 11 | Stobiecki Jan | VI | Bursy nauczycieli szkół ludow. | 50 | — |
| 12 | Nawrocki Maryan | VII. | Zygmunta i Maryi Laskowskich | 200 | — |
| 13 | Sądel Wojciech | VII. | Kaspra Zubowskiego | 150 | — |
| 14 | Weiberg Samson | VII | Przełożeństwo domu modlitwy. izr post. | 100 | — |
| | Ogólna kwota stypendyów wynosiła zatem . . . . | | | 1988 | — |

# VII.

# Pomoc koleżeńska.

## Dochód.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. Pozostało z roku szkolnego 1894/95 . . . . . . . . . | — zł. | 15 ct. |
| 2. Uczniowie złożyli w tym roku . . . . . . . . . . . . | 263 „ | 90 „ |
| 3. Nadzwyczajne datki i zwrócone pożyczki . . . . . . . | 23 „ | 30 „ |
| Razem . . . | 287 „ | 35 „ |

## Rozchód.

| | | |
|---|---|---|
| 1. Oprawa książek szkolnych . . . . . . . . . . . . . . | 47 zł. | 38 ct. |
| 2. Zakupiono „ „ za . . . . . . . . . . . . | 145 „ | 48 „ |
| 3. Wydatki biblioteczne . . . . . . . . . . . . . . . . | 4 „ | 50 „ |
| 4. Zapomogi i pożyczki uczniom udzielone . . . . . . . . | 49 „ | — „ |
| Razem . . . | 246 zł. | 36 ct. |
| Reszta . . . | 40 zł. | 99 ct. |

## Biblioteka

posiada książek szkolnych na wszystkie klasy:

| | |
|---|---|
| 1. do nauki religii . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 130 |
| 2. „ „ języka polskiego . . . . . . . . . . . . . . | 150 |
| 3. „ „ „ niemieckiego . . . . . . . . . . . . | 141 |
| 4. „ „ „ francuskiego . . . . . . . . . . . . | 8 |
| 5. „ „ geografii . . . . . . . . . . . . . . . . . | 110 |
| 6. „ „ historyi . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 100 |
| 7. „ „ matematyki . . . . . . . . . . . . . . . . | 110 |
| 8. „ „ historyi naturalnej . . . . . . . . . . . . | 148 |
| 9. „ „ fizyki . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 49 |
| 10. „ „ chemii . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 25 |
| 11. „ „ geometryi wykreślnej . . . . . . . . . . . | 32 |
| Razem . . . . . . . | 1023 |

Wszystkim łaskawym dawcom imieniem ubogiej młodzieży składa Zarząd Pomocy koleżeńskiej serdeczne podziękowanie.

| | | |
|---|---|---|
| *Dr. H. Zathey* | *X. Dr. Franciszek Świderski* | *Jan Bidziński* |
| przewodniczący. | zawiadowca. | członek zarządu. |

# VIII.

# Zbiory naukowe.

## Biblioteka.

*A.* Biblioteka nauczycieli.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| W dziale | I. (Relig. i filoz.) | było | w r. | 1894 | dzieł | 50 | przyb. | 2 | razem jest | 52 |
| „ | II. (Jęz. polski) | „ | „ | „ | „ | 301 | „ | 8 | „ „ | 309 |
| „ | III. (Jęz. niem.) | „ | „ | „ | „ | 96 | „ | 3 | „ „ | 99 |
| „ | IV. (Historya) | „ | „ | „ | „ | 159 | „ | 6 | „ „ | 165 |
| „ | V. (Geografia) | „ | „ | „ | „ | 189 | „ | — | „ „ | 189 |
| „ | VI. (Matematyka) | „ | „ | „ | „ | 122 | „ | — | „ „ | 122 |
| „ | VII. (Fiz. i chemia) | „ | „ | „ | „ | 89 | „ | — | „ „ | 89 |
| „ | VIII. (Hist. nat.) | „ | „ | „ | „ | 79 | „ | — | „ „ | 79 |
| „ | IX. (Szt. i archit.) | „ | „ | „ | „ | 57 | „ | 2 | „ „ | 59 |
| „ | X. (Szkolnictwo) | „ | „ | „ | „ | 84 | „ | 2 | „ „ | 86 |
| „ | XI. (Podręcznik) | „ | „ | „ | „ | 206 | „ | 14 | „ „ | 220 |
| „ | XII. (Słowniki) | „ | „ | „ | „ | 21 | „ | — | „ „ | 21 |
| „ | XIII. (Prawo) | „ | „ | „ | „ | 2 | „ | — | „ „ | 2 |
| „ | XIV. (Filolog. klas) | „ | „ | „ | „ | 6 | „ | 15 | „ „ | 21 |
| | | „ | „ | „ | „ | 1461 | „ | 52 | „ | 1513 |

Programów szkolnych było w r. 1894. 2646, przybyło 154, jest obecnie 2800.

Zakład otrzymuje następujące czasopisma:

1. Muzeum.
2. Biblioteka warszawska.
3. Kwartalnik historyczny.
4. Przegląd polski.
5. Przewodnik bibliograficzny.
6. Misye katolickie (dar Redakcyi).
7. Verordnungsblatt des k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht.
8. Zeitschrift für das Realschulwesen.
9. Zeitschrift für den deutschen Unterricht.
10. Deutsche Rundschau.
11. Mittheilungen der k. k. geographischen Gesellschaft.
12. Archäologisch-epigraphische Mittheilungen (dar Wys. c. k. Min. Oświaty.)
13. Kunst für Alle.
14. Jahresberichte über das höhere Schulwesen.
15. Roeznik statystyki przemysłu i handlu kraj. (dar Wys. Wydz. kraj.)
16. Bulletin international de l'académie de sciences de Cracovie.

*B.* Biblioteka dla młodzieży:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Dzieł | polskich | było w roku 1894 | 547, | przybyło | 18, | jest obecnie | 565 |
| „ | niemieck. | „ „ | 601, | „ | 10, | „ „ | 611 |
| „ | francusk. | „ „ | 22, | „ | 8, | „ „ | 30 |
| | Ogółem przybyło w roku 1894 | | 1170, | przybyło | 36, | jest obecnie | 1206 |

Biblioteka otrzymała w darze:

*a*) Od Wys. Akademii Umiejętności w Krakowie 9 tomów wydawnictw.

*b*) Od Wys. c. k. Rady szkolnej krajowej: Sprawozdanie o stanie szkół średnich galicyjskich z r. 1894.

*c*) Od Wgo. p. dr. Molickiego: Siewiński, Dumy Rylejewa; Odpowiedź p. St. Szczepanowskiemu na jego „Nędzę Galicyi"; Dr. Molicki, Wykład Sagmonlogii Metodologia.

*d*) Od S. Karasiewicza, ucznia IVa klasy: Buckley, Przez szkła czarodzieja Kramsztyk. Fizyka bez przyrządów.

*e*) Od K. Estreichera, ucznia kl. IIIa Kindergartenlaube 2 tomy, Amicis, Pamiętnik chłopca, Szwarce, Siedm lat w Schlühselburgu, Anczyc, Duch puszczy.

Wypożyczano książki z biblioteki dla młodzieży dwa razy w tygodniu.

| KLASA | Wypożyczono | | | | Razem |
|---|---|---|---|---|---|
| | uczniom | dzieł polskich | dzieł niem. | dzieł franc. | |
| I a. | 15 | 141 | 17 | — | 158 |
| I b. | 23 | 63 | 2 | — | 65 |
| I c. | 23 | 241 | 18 | — | 259 |
| II a. | 13 | 100 | 30 | — | 130 |
| II b. | 24 | 230 | 33 | — | 263 |
| II c. | 22 | 146 | 35 | — | 181 |
| III a. | 20 | 142 | 24 | 2 | 168 |
| III b. | 25 | 133 | 21 | 1 | 155 |
| IV a. | 27 | 306 | 79 | 7 | 392 |
| IV b. | 16 | 44 | 14 | — | 58 |
| V a. | 19 | 145 | 50 | — | 195 |
| V b. | 11 | 55 | 11 | — | 66 |
| VI. | 14 | 155 | 45 | — | 200 |
| VII. | 25 | 234 | 48 | — | 282 |
| Razem | 277 | 2135 | 427 | 10 | 2572 |

*W. Krywult*
zawiadowca biblioteki.

## Zbiór geograficzno-historyczny.

W roku szkolnym 1895 posiadał zakład:

| | |
|---|---|
| 1. Globów i przyrządów | 2 |
| 2. Map | 95 |
| 3. Atlasów | 5 |
| 4. Obrazów historycznych Józefa Hofmana | 5 |
| 5. „ „ Langla | 40 |

*R. Spitzer*
zawiadowca zbiorów geog. hist.

## Gabinet historyi naturalnej.

Stan Gabinetu.

*A. Okazy.*

| | |
|---|---|
| Zwierząt kręgowych | 153 |
| „ członkonogich | 2329 |
| Mięczaków | 869 |
| Robaków, promieniaków i pierwoszczaków | 125 |
| Roślin zasuszonych | 892 |
| Minerałów, skał i skamielin | 745 |

*B. Preperata, szkielety, modele, tablice, atlasy, narzędzia.*

| | |
|---|---|
| Preparatów mikroskopowych | 55 |
| Szkieletów | 11 |
| Modeli anatomicznych | 24 |
| Modeli szklannych preedstawiających jamochłony | 10 |
| „ kwiatów z masy papierowcj | 40 |
| „ krystalograficznych z drzewa | 115 |
| „ drogich kamieni | 54 |
| Tablic botanicznych kolorowanych | 21 |
| Atlas botaniczny Szuberta | 1 |
| Atlas zoologiczny Lübena | 1 |
| Tablic zoologicznych Schreibera | 15 |
| Mikroskop Zeisa | 1 |
| Gablotek ściennych | 10 |
| Tablic Nitscha i Leuckarta | 28 |
| Modeli grzybów | 170 |
| „ krystalograficznych ze szkła sztuk | 19 |

*Cz. Tomaszewicz,*
zawiadowca gabin. hist. nat.

## Gabinet fizykalny.

Liczył przyrządów . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 302

*Fr. Jeziorski*,
zawiadowca gabin. fizykalnego.

## Gabinet chemii.

Posiada: Przyrządów . . . . . . . . . . . . . . . . . . 192
Naczyń przeróżnych . . . . . . . . . . . . . . . . 564
Minerałów . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54
Przetworów chemicznych . . . . . . . . . . . . . . 162

*Karol Kunz*,
zawiadowca gab. chemicznego.

## Gabinet rysunków geometrycznych.

Modeli drutowych . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20
„ drewnianych brył geometrycznych . . . . . . . . . . 29
Przyrządów mierniczych . . . . . . . . . . . . . . . . 59
Przyborów rusunkowych . . . . . . . . . . . . . . . . 12
Modeli do nauki geom. wykreślnej drutowych i drewnianych razem . 30

*H. Hołubowicz*,
zawiadowca gabin. rys geom.

## Gabinet rysunków odręcznych.

Wzorów do rysunku jest razem sztuk . . . . . . . . . . . . 2467
Gipsów . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 163
Modeli drewnianych . , . . . . . . . . . . . . . . . . 30
Szkoła akwareli Ciceri . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
Szkiców berlińskich zeszytów . . . . . . . . . . . . . . 3
Model drutowy głowy ludzkiej . . . . . . . . . . . . . . 1
Przyrząd do doświadczań w perspektywie . . . . e. . . . . . 1

*K. Kosiński*,
Zawiadowca gabin. rys. odręczn.

## IX.

# Egzamin dojrzałości.

**a) We wrześniu 1894.**

W tym terminie zgłosiło się do egzaminu 7 publicznych abituryentów tutejszego zakładu i 5 externistów.

Dwóch publicznych abituryentów i wszyscy externiści zdawali cały egzamin dojrzałości, reszta egzamin poprawczy z jednego przedmiotu.

Z tutejszych otrzymali świadectwo dojrzałości:

1. Czech Paweł.
2. Kotkowski Bolesław.
3. Dziewański Adam.
4. Furdzik Edward.
5. Kuliński Bogusław.
6. Novák Jan.
7. Rosthal Benjamin.

Pierwsi dwaj zdawali cały egzamin, pozostali pięciu egzamin poprawczy z jednego przedmiotu.

Wszyscy externiści uznani zostali za dojrzałych.

**b) W terminie letnim 1895 r.**

| | |
|---|---|
| Zgłosiło się do egzaminu uczniów zwyczajnych . . . . . . . . . . | 30 |
| Z tych uznano za dojrzałych z odznaczeniem . . . . . . . . . . | 3 |
| „ „ „ „ dojrzałych . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 22 |
| Pozwolono poprawić z jednego przedmiotu . . . . . . . . . . | 4 |
| Reprobowano na rok . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 1 |
| Razem . . . . | 30 |

# Wykaz abituryentów, którym przyznano świadectwo dojrzałości.

| L. p. | Imię i nazwisko abituryenta. | Kraj i miejsce urodzenia. | Rok urodzenia | Religia | Narodowość | Uczęszczał do szkoły w innym zakładzie lat | Uczęszczał do szkoły tutaj lat | Wynik egzaminu | Przyszły zawód |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Bojarski Stanisław, Piotr (dw. im.) | Kraków W. Ks. Krak. | 1874 | rzym. kat. | polska | — | 7 | dojrzały | Inżynierya |
| 2 | Dembowski Felicyan, Eustachy (dw. im.) | Gorlice Galicya | 1874 | „ | „ | — | 3 | „ | Prawo |
| 3 | Dobrzański Józef, Henryk Serwacy (tr. im.) | Dębe Król. polskie | 1875 | „ | „ | 4½ | 3 | „ | Argonomia |
| 4 | Drobniak Feliks, Teofil (dw. im.) | Jaworzno W. Ks. Krak. | 1875 | „ | „ | — | 7 | „ | Górnictwo |
| 5 | Guziakiewicz Franciszek, Jakób (dw. im.) | Kraków W. Ks. Krak. | 1876 | „ | „ | — | „ | „ | Inżynierya |
| 6 | Hausner Leopold | „ | „ | mojż. | „ | — | „ | „ | „ |
| 7 | Hochstim Abraham, Hirsch (dw. im.) | „ | 1875 | „ | „ | — | „ | „ | Mechanika |
| 8 | Kahane Izaak | Podgórze Galicya | 1873 | „ | „ | — | „ | dojrzały z odznaczeniem | Inżynierya |
| 9 | Kamiński Leon, Władysław (dw. im.) | Jaworzno W. Ks. Krak. | 1877 | rzym. kat. | „ | — | „ | dojrzały | Górnictwo |

| L. p. | Imię i nazwisko abituryenta | Kraj i miejsce urodzenia | Rok urodzenia | Religia | Narodowość | Uczęszczał do szkoły: w innym zakładzie lat | Uczęszczał do szkoły: tutaj lat | Wynik egzaminu | Przyszły zawód |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | Kłodnicki Władysław, Kazimierz (dw. im,) | Przemyśl Galicya | 1875 | rzym. kat. | polska | 2 | 1 | dojrzały | Górnictwo |
| 11 | Kottek Adam, Bonifacy (dw. im.) | Warszawa Król. polskie | 1878 | „ | „ | — | 7 | „ | Mechanika |
| 12 | Kühnel Wacław | Kraków W. Ks. Krak. | 1876 | „ | „ | — | „ | „ | Budownictwo |
| 13 | Marek Ignacy, Mieczysław (dw. im.) | „ | 1877 | „ | „ | — | „ | „ | Inżynierya |
| 14 | Nawrocki Maryan, Franciszek, Jan Kanty (tr. im.) | Kęty Galicya | „ | „ | „ | 2 | 5 | dojrzały z odznaczeniem | „ |
| 15 | Noël Antoni, Eugeniusz (dw. im.) | Sosolówka Galicya | 1875 | „ | „ | 8 | 1 | dojrzały | Agronomia |
| 16 | Parvi Wincenty | Kraków W. Ks. Krak. | „ | „ | „ | — | 7 | „ | Inżynierya |
| 17 | Popiel Kazimierz, Józef (dw. im.) | Zielonki W. Ks. Krak. | „ | „ | „ | 5 | 3 | „ | Leśnictwo |
| 18 | Ryszkowski Władysław, Jan Baptysta (dw. im.) | Kraków W. Ks. Krak. | 1877 | „ | „ | — | 7 | „ | Inżynierya |
| 19 | Salb Ludwik, Edward, Norbert (tr. im.) | „ | „ | ewang. | niem. | — | „ | dojrzały z odznaczeniem | Litografia |

| L. p. | Imię i nazwisko abituryenta | Kraj i miejsce urodzenia | Rok urodzenia | Religia | Narodowość | Uczęszczał do szkoły w innym zakładzie lat | Uczęszczał do szkoły tutaj lat | Wynik egzaminu | Przyszły zawód |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | Sądel Wojciech, Jan Ewangelista (dw. im.) | Prądnik czerwony W. Ks. Krak. | 1875 | rzym. kat. | polska | — | 7 | dojrzały | Inżyuierya |
| 21 | Turski Karol, Jan (dw. im.) | Zrębówka Galicya | 1876 | „ | „ | — | 9 | „ | Agronomia |
| 22 | Weisberg Samson | Kraków W. Ks. Krak. | 1874 | mojż. | „ | — | 7 | „ | Architcktura |
| 23 | Wężyk Franciszek, Ksawery, Maryan, Andrzej (czt. im.) | Witulin Król. Polskie | „ | rzym. kat. | „ | 3 | 3½ | „ | Agronomia |
| 24 | Wojtasiewicz Antoni, Tomasz (dw. im.) | Kraków W. Ks. Krak. | 1876 | „ | „ | — | 7 | „ | Inżynierya |
| 25 | Wysocki Jacek, Antoni (dw. im.) | Smolice Galicya | 1877 | „ | „ | — | „ | „ | Agronomia |

# X.

# Kronika zakładu.

Rok 1895.

I.

1. Profesora tutejszego zakładu **Dr. Józefa Tretiaka** raczył Najjaśniejszy Pan najłaskawiej zamianować nadzwyczajnym profesorem języka i literatury ruskiej w Uniwersytecie Jagiellońskim w Krakowie; (reskr. Wys. c. k. Rady szk. kraj. z dnia 3 lipca 1894 L. 13401.)

2. Zastępca nauczyciela w tutejszym zakładzie **Bronisław Mierka**, został przeniesiony do c. k. gimnazyum w Bochni (rozp. Wys. c. k. Rady szk. kraj. z dnia 25 lipca 1894 L. 14102).

3. Kandydat stanu nauczycielskiego **Józef Szczudło** został mianowany zastępcą nauczyciela w tutejszym zakładzie (rozp. Wys. c. k. Rady szk. kraj. z dnia 25 lipca 1894 L. 14523).

4. Zastępca nauczyciela w c. k. gimnazyum w Wadowicach **Józef Wierzbicki** został przeniesiony do tutejszego zakładu (rozp. Wys. c. k. Rady kraj. z dnia 27 lipca 1894 L. 12646), a następnie do gimnazyum w Nowym Sączu (rozp. z dnia 4 stycznia 1895 L. 31470).

5. Prof. **Alojzy Szarłowski** został przeniesiony do c. k. gimnazyum III. w Krakowie ( rozp. Wys. Prezydyum c. k. Rady szk. kraj. z dnia 10 sierpnia 1894 L. 394).

6. Profesor w c. k. gimnazyum w Brzeżanach **Roman Spitzer** został przeniesiony do tutejszego zakładu (reskr. Wys. Prezydyum c. k. Rady szk. kraj. z dnia 10 sierpnia 1394 L. 384).

7. Nauczyciel w c. k. gimnazyum w Sanoku **Waleryan Krywult** został przeniesiony do tutejszego zakładu (rozp. Wys. Prezydyum c. k. Rady szk. z dnia 10 sierpnia 1894 L. 384).

8. Zastępca nauczyciela w tutejszym zakładzie **Dr. Antoni Kurpiel** otrzymał posadę rzeczywistego nauczyciela w c. k. gimnazyum w Jarosławiu (reskr. Wys. Prezydyum c. k. Rady szk. kraj. z dnia 10 sierpnia 1894 L. 384).

9. Zastępca nauczyciela w tutejszym zakładzie **Bronisław Kąsinowski** został przeniesiony do c. k. gimnazyum św. Anny w Krakowie (rozp. Wys. c. k. Rady szk. kraj z dnia 13 lipca 1894 L. 15992).

10. Profesor c. k. gimnazyum w Bochni **Stefan Grudziński** został przeniesiony do tutejszego zakładu (reskr. Wys. Prezydyum c. k. Rady szk. kraj. z dnia 30 sierpnia 1894 L. 435).

11. Zastępca nauczyciela w tutejszym zakładzie **Dr. Med. Jan Regiec** został uwolniony od obowiązków służbowych w tutejszym zakładzie (rozp. Wys. c. k. Rady szk. kraj. z dnia 17 września 1894 L. 20587).

12. Docent prywatny w c. k. Uniwersytecie we Lwowie **Dr. Wawrzyniec Teisseyre** został zamianowany zastępcą nauczyciela w tutejszym zakładzie (rozp. Wys. c. k. Redy szk. kraj z dnia 17 września 1894 L. 205877, uwolniony zaś został z tej posady (rozp. z dnia 13 lutego 1896 L. 2638).

13. Zastępca nauczyciela w c. k. gimnazyum w Nowym Sączu **Adam Wołek** został przeniesiony do tutejszego zakładu (rop. Wys. c. k. Rady szk. kraj. z dnia 4 stycznia 1895 L. 31470).

14. Profesor tutejszej szkoły, przydzielony do urzędowania w Wys. Radzie szkolnej kraj. **Mieczysław Zaleski**, Najwyższym poleceniem z d. 12 maja b. r. został przez Najjaśniejszego Pana mianowany krajowym Inspektorem szkół.

II.

Dni imienin Najjaśniejszych Państwa 4 października i 19 listopada obchodziła szkoła uroczystemi nabożeństwami, po których odśpiewano hymn ludu.

Dnia 5 maja odbyło się nabożeństwo żałobne za spokój duszy ś. p. Najj. Cesarzowej Maryi Anny, a dnia 28 czerwca za duszę ś. p. Najj. Cesarza Ferdynanda I.

III.

Rok szkolny rozpoczął się uroczystym nabożeństwem dnia 3 września.

Egzamin wstępny do klasy I. odbył się 1 lipca i 1 września 1894. W roku bieżącym wyjątkowo 28 czerwca i 1 września (jak zwykle).

Egzamin dojrzałości poprawczy i uzupełniający odbył się dnia 28 i 29 września pod przewodnictwem JW. Inspektora szkół średnich **Jana Frankego**. Piśmienny egzamin dojrzałości trwał od 13 do 17 maja, ustny zaś odbył się w dniach 5 do 9 czerwca pod tem samem przewodnictwem.

Dnia 24 listopada 1894 odbył się staraniem uczniów VII. klasy wieczorek ku uczczeniu nieśmiertelnej pamięci **Adama Mickiewicza**, na którym przemówił do młodzieży prof. **Czesław Pieniązek**.

Młodzież przystępowała trzy razy w ciągu roku do śś. Sakramentów Pokuty i Ołtarza.

Zakończenie roku szkolnego i rozdanie świadectw 29 czerwca.

IV.

W drugiej połowie stycznia hospitował nasz zakład J. W. Inspektor **Jan Franke**.

V.

**Zarządzenia w sprawie rozwoju sił fizycznych młodzieży** były takie same jak ubiegłym w roku. Wspólna majówka na Bielanach odbyła się pod przewodnictwem Dyrektora i całego grona profesorów dnia 4 maja.

VI.

**Jan O'Byrn**, uczeń klasy I. B. umarł w grudniu 1894 w domu rodziców w Nowym Targu.

**Bittmar Fryderyk**, uczeń klasy IV. B. umarł dnia 3 czerwca 1895. Szczery żal kolegów i przełożonych, towarzyszył im do grobu.

Spokój ich duszy!

# XI.

## Ważniejsze rozporządzęnia władz szkolnych z r. szk. 1894/95.

1) Wysoka c. k. Rada szkolna krajowa zaliczyła wpoczet książek szkolnych następujące dzieła:
*a*) **Benoni-Tatomir**: krótki rys geografi wyd. IV. (rozp. dnia 30 września 1894 L. 18281).
*b*) **J. Amborski**: Książki do nauki języka francuskiego. Część II. (roz. z dnia 30 września 1894 L. 18940).
*c*) **Ks. Tomasz Dąbrowski**: Historya biblijna (rozp. 12 października 1894 L. 15879).
*d*) **Kawecki-Tomaszewski**: Fizyka dla niższych szkół średnich (rozp. z dnia 15 października 1894 L. 13368).
*e*) **A. Bobin**: Wypisy polskie dla klas wyższych (rozp. z dnia 2 listopada 1894 L. 25601).
*f*) **Próchnicki-Wojcik**: Wypisy polskie i **Czubek Zawiliński**: Wypisy polskie (rozp. z dnia 7 października 1894 L. 17347).
*g*) **Bronisław Gustawicz**: Europa w drugiej połowie XVI. wieku. Mapa ścienna (rozp. z dnia 20 stycznia 1895 L. 30365/94).
*h*) **Dr. Hugo Zathey**: Antologia grecka. We Lwowie 1895 (rozp. z dnia 24 marca 1895 L. 5918).
*i*) **Józef Soleski**: Nauka fizyki dla klas wyższych (rozp. z dnia 19 kwietnia 1895 L. 7873).
2) C. k Namiestnictwo we Lwowie ustanawia do przeprowadzenia budowy szkoły realnej w Krakowie Komitet i powołuje na członków tegoż Dyrektora **Hugona Zatheya** (rozp. z dnia 1 listopaca 1894 L. 86373).
3) Wysoka c. k. Rada szkolna krajowa rozporządzeniem z dnia 12 marca 1895 L. 5295 poleca aby młodzież co do noszenia mundurków stósowała się ściśle do wydanych przepisów.

# XII.

# Klasyfikacya uczniów

## w II. półroczu 1895.

### Stopień I otrzymali:

(Celujących uczniów oznaczono grubszym drukiem).

Adamowicz Ferdynand.
Dunikowski Jan.
Dzikowski Bogusław.
Filipowski Franciszek.
Flaschen Juliusz.
**Fleischmann Feiwel.**
Gawron Józef.
Góra Leon.
Gutmann Hirsch.
Heyn Karol.
Holc Mieczysław.
Karbowski Jan.
Klibanow Markus.
Klimkiewicz Leon.
Kraskowski Józef.
Liebling Aleksander.
Łowczyński Tadeusz.
Naar Edward.
Pamm Izak.
Pawełek Stanisław.
Petersch Maksymilian.
Rendel Zygmunt.
Schlager Samuel.
Vogel Stanisław.
Wojtyga Józef.
**Ziedel Józef.**

Procent dobrych 84%. Drugi stopień 1, trzeci 4, poprawek 0.

KLASA I B.

Bittner Jerzy.
Brand Izak.
Buczek Jan.
Czerny Józef.
Drożdż Bronisław.
Eisen Mojżesz.
Goniakowski Mieczysław.
Gutmann Feliks.
Hołubowicz Eustachy.
Janik Wacław.
Kuczborski Witold.
Kwiatkowski Tadeusz.
Mandel Karol.
**Menasche Ignacy.**
Miedniak Zdzisław.
Musiał Władysław.
Nedok Czesław.
Oleś Julian.
Pelikan Artur.
Porębski Stanisław.
Rippe Wilhelm.
**Rybicki Jan.**
Ryl Mieczysław.
**Sadowski Leon.**
Semiatycz Kalman.
Szańkowski Ignacy.
Tabeński Kazimierz.
Trammer Alfred.
Urabin Mendel.
Urban Maryan.
Uziębło Stanisław.
Zadęcki Ignacy.
Zagórski Stanisław.
Zajdzikowski Leon.
Zapałowicz Jan.

Procent dobrych 89%, Drugi stopień 3, trzeci 2, poprawek 4.

## KLASA I C.

Brand Leon.
Buś Adam.
Czaplicki Tadeusz.
Grosser Otto.
Jaworzyński Józef.
Kamocki Józef.
Kellner Gotfryd.
Ledóchowski Henryk.
Lenartortowicz Leon.
Lubaczewski Rudolf.
Maćkowski Kazimierz.
Maćkowski Tomasz.
Malarki Tadensz.
Mączyński Mieczysław.
Michałowski Adam.
Mirecki Wacław.
Pawlica Juliusz.
Rosłan Władysław.
Soldinger Antoni.
Szymberski Janusz.
Tarkowski Stanisław.
Trzetrzewiński Konrad.
Wesper Józef.
Winkler Wilhelm.
Wojnarski Stanisław.
Zaremba Czesław.
Skąpski Zygmunt.

Procennt dobrych 83%, Drugi stopień 3, trzeci stopień 3, poprawek 3.

## KLASA II A.

Bartonce Hngo.
Brand Bernand.
**Chlebowski Edward**
Ferek Roman.
Fink Abraham.
Gromczakiewicz Kazimierz.
Halawa Augustyn.
Kaczor Rudolf.
Kleszczyński Aleksander.
Klimczyk Stanisław.
Lachowicz Antoni.
Lenart Jan.
Moor Adolf.
Niemetz Karol.
Nowicki Stanisław.
Obertyński Mieczysław.
Ortyński Kazimierz.
Petrzyk Jan.
Romanowski Zdzisław.
Singer Gedalia.
Szotarski Gustaw.
Taborski Antoni.
Weinberg Szymon.
Wendt Władysław.
Wodziczko Zdzisław.
Zbylut Klemens.
Żuławski Bogdan.

Procent dobrych 91%, Drugi stopień 1, trzeci stopień 2, poprawek 3.

## KLASA II B.

Ambrożek Feliks.
Banderewski Maryan.
Bielski Jerzy.
Bociański Jan.
Burzyński Jan.
**Cyrankiewicz Józef.**
Czerny-Szwarcenberg Michał.
Czunko Adam.
Drozdowski Zygmunt.
Dyndowicz Michał.
Eimer Ryszard.
Glaser Bernard.
Göttel Wilhełm.
Holzer Alfred.
Kańczucki Edward.
Komar Medard.
Kulesza Feliks.
Łasiński Władysław.
Makomaski Teofil.
Nowakowski Kazimierz.
Palus Julian.
Prich Rudolf.
**Pruczek Tadeusz.**
Szneider Salomon.
Sikora Stefan.
Śmiciński Eugeniusz.
Szulc Mieczysław.
Teleśnicki Kazimierz.
Teleśnicki Józef.
Zathey Józef.
Żmigród Herman.

Procent dobrych 86%, stopień drugi 4, stopień trzeci 2, poprawek 4.

## KLASA II C.

Heller Władysław.
Kaliciński Wacław.
Kellner Oskar.
Kolankowski Michał.
Kopciński Edward.
Lejczak Ignacy.
Niedbała Kornel.
Ozga Władysław.
Piotrowski Andrzej.
Rybarski Piotr.
Sokołowski Jan.
Szotarski Tadeusz.
Szymberski Tadeusz.
Tyrała Henryk.
Wdowiński Jozna.
Winiarski Ignacy.

Procent dobrych 78, stopień drugi 4, stopień trzeci 1, poprawek 2.

## KLASA III A.

Abrahamowicz Abraham.
Bajer Józef.
Bałucki Stanisław.
Bochnig Stanisław.
Broniewski Tadeusz.
**Ehrenpreis Arnold.**
Friedrich Henryk.
Jachowicz Gustaw.
Kalicki Feliks.
Kotsch Alfred.
Kowalski Franciszek.
Kramarski Juliusz.
Majka Tadeusz.
Müller Maurycy.
Nalepa Jan.
Niedziałkowski Stanisław.
Pietrzak Bolewsław.
Postulka Hubert.
Schrott Tadeusz.
Spytkowski Julian.
Stadtmüller Karol.
Stamirowski Stefan.
Szubert Leon.
**Zapalski Władysław.**
Zengteller Henryk.

Procent dobrych 100%, stopień drugi 0, stopień trzeci 0, poprawek 5.

## KLASA III B.

Aleksandrowicz Maksymilian.
Bachorz Mieczysław.
Basiński Konrad.
Borzęcki Edmund.
Borzęcki Tymoteusz.
Gawron Karol.
Glatman Jan.
Glücksman Sandel.
Heim Artur.
Jarzębski Władysław.
**Karyłowski Tadeusz.**
Kozłowki Stefan.
**Krzemiński Kazimierz.**
Kuliński Mieczysław.
Kwapniewski Władysław.
Kwiatkowski Ludwik.
Lauterbach Julian.
Löwenkron Jakób.
Maleček Jan.
Matzke Zygmunt.
Obermayer Alfred.
Pieguszewski Stanisław.
Piekarczyk Mikołaj.
**Skibka Władysław.**
Skwarc Konstanty.
Suchecki Kazimierz.
Szukiewicz Czesław.
Tellier Józef.
Węgleński Stefan.

Procent dobrych 90%, stopień drugi 3, stopień trzeci 1, poprawek 7.

## KLASA IV A.

Bieńkowski Karol.
Ciupka Wojciech.
Chwastowski Stanisław.
Dąbrowski Józef.
Dąbrycz Siefan.
Dębski Wacław.
Gronner Henryk.
Gronner Rudolf.
Hanausek Paweł.
Harasiewicz Leon.
Hilczer Władysław.
Kern Leon.

Legutko Wiktor.
Lipczyński Kazimierz.
Matecki Józef.
Matecki Józef.
Molicki Władysław.
Nowakowski Stanisław.
Nowakowski Tadeusz.
Ozman Teodor.
Piotrowski Wojciech.
Pluta Jan.
Raaba Michał.
Radwański Józef.
Skarzyński Szczęsny.
Stoczkiewicz Henryk.
Szubert Awit.
Szymczykiewicz Stefan.
Urbanik Ludwik.
Wink Tadeusz.

Procent dobrych 88%, Drugi stopień 2, stopień trzeci 2, poprawek 2.

## KLASA IV B.

Bieniaszewski Adam.
Drozd Agenor.
Drozd Hieronim.
Feldbaum Samson.
Fiderkiewicz Władysław.
Grabczak Andrzej.
Hackbeil Franciszek.
Hanner Antoni.
Hanner Maksymilian.
Jakubowski Eugeniusz.
Jorasz Jerzy.
Kritzler Henryk.
Kułakowski Stanisław.
**Kwieciński Maryan.**
**Leonhard Bolesław.**
Mialovich Fryderyk.
Mrowec Kazimierz.
Pułczyński Franciszek.
Rausch Władysław.
Rudolphi Stanisław.
Sadowski Anatol.
Szurek Szczepan.
Tiefenbrunn Gustaw.
Twaróg Jan.
Ziemba Zygmunt.
Żebrawski Włodzimierz.

Procent dobrych 78%, stopień drugi 4, stopień trzeci 4, poprawek 3.

## KLASA V A.

Amster Markus.
Białek Zygmunt.
**Biliński Wacław.**
Dobrzański Zygmunt.
Dudek Henryk.
Filasiewicz Klaudyusz.
Goldwasser Henryk.
Guschelbauer Marcin.
Jawecki Eugeniusz.
Kearney Stanisław.
Kielesiński Rudolf.
Lustgarten Alfred.
Miedniak Kazimierz.
Mierzwiński Ludomir.
Nowakowski Edmund.
Weingrün Jozua.
Winiarski Zygmunt.
Zopoth Wilhelm.
Żebrawski Stanisław.
Żurowski Jan.

Procent dobrych 92%, stopień drugi 2, stopień trzeci 0, poprawek 3.

## KLASA V B.

Bogdański Jan.
Chmurski Władysław.
Feldman Dawid.
Goldwasser Pinkus.
Kleinblatt Leib.
Kleja Stanisław.
Korbel Andrzej.
Kowalski Władysław.
Kozłowski Stanisław.
**Langer Mieczysław.**
Machalski Ludwik.
Makowski Romnuald.
Münnich Stanisław.
Spingarn Henryk.
Zamorski Władysław.

Procent dobrych 96%, stopień drugi 0, stopień trzeci 0, poprawek 10,

## KLASA VI.

Beckmann Filip.
Bedrn k Franciszek.
Dziewolski Romuald.
Gostkowski Aleksander.
Jaśkiewicz Józef.
Kostecki Edward.
Krzyżanowski Jan.
Kubiczek Aleksander.
Kukuk Natan.
Markiewicz Henryk.
Menschek Józef.
Palisa Stefan.
Romanowski Artur.
Scherbaum Władysław.
Skąpski Bolesław.
Sollinger Karol.
Stobiecki Jan.
Świtek Jan.
Tygan Albin.
Zieliński Alojzy.

Procent dobrych 96%, stopień drugi 1, stopień trzeci 0, poprawek 3.

# XIII.

# OGŁOSZENIE.

Wpisy uczniów na rok szkolny 1894/5 odbywać się będą w dniach 30 i 31 sierpnia od godziny 9—11 rano i od 4—5 popołudniu. Późniejsze zgłoszenia tylko w razie **ważnych** powodów i to tylko na mocy zezwolenia Wysokiej c. k. Rady szkolnej krajowej uwzględnione być mogą.

Uczniowie nowo wstępujący mają się zgłaszać do zapisu w towarzystwie rodziców lub opiekunów, i przedłożyć świadectwa szkolne tego zakładu, w którym dotychczas byli, tudzież metrykę. Taksa wstępna 2 złr. 10 cnt. Datek 1 złr. na zbiory naukowe składają wszyscy nowo wstępujący i dawni uczniowie. Z początkiem drugiego półrocza składa każdy uczeń 50 ct. na wspólne wycieczki.

**Egzamina wstępne do I klasy** odbywać się będą w dwóch terminach 28 czerwca i 1 września. Zgłosić się potrzeba najpóźniej 27 czerwca, względnie 31 sierpnia.

Wybór jednego z tych dwóch terminów pozostawia się rodzicom uczniów. Powtórzenie wstępnego egzaminu ani w tym, ani w innym zakładzie nie jest dozwolone gdyż wynik pierwszego egzaminu rozstrzyga stanowczo o przyjęciu lub nie przyjęciu. Powtórzenie takiego egzaminu w innym zakładzie będzie w każdym razie nieważne.

## Zakres wymagań przy egzaminie wstępnym do I. klasy.

(Rozp, Wys. Rady szk. kr. z dn. 16 maja 1887 l. 2764.)

*a*) Z religii: Wiadomości których uczeń nabyć powinien w szkołach czterechklasowych.

*b*) Z języka polskiego: Czytanie płynne i wyraźne, objaśnienie odczytanych ustępów pod względem treści i związku myśli; opowiadanie treści większymi ustępami; znajomość części mowy, odmiana imion i czasowników, znajomość zdania pojedynczego, rozszerzonego i rozbiór jego części składowych pod względem składni zgody i rządu; poprawne napisanie dyktatu z zakresu pojęć znanych uczniom, z uwzględnieniem głównych zasad interpunkcyi.

*c*) Z języka niemieckiego: Czytanie płynne i zrozumiałe, znajomość odmiany rodzajników, rzeczowników, przymiotników, zaimków osobistych,

dzierżawczych, wskazujących i względnych; odmiana słów posiłkowych i czasowników słabych we wszystkich formach strony czynnej i biernej; odmiany najzwyklejszych czasowników mocnych; zasób wyrazów z zakresu pojęć uczniom znanych; poprawne napisanie łatwego dyktatu, którego treść przed podyktowaniem podano uczniowi w języku polskim.

*d*) Z rachunków: Pisanie liczb do miliona włącznie; biegłość w czterech działaniach liczbami całkowitemi; pewność w tabliczce mnożenia, znajomość ważniejszych miar metrycznych.

Do sali, gdzie odbywa się egzamin nie mają wstępu obce osoby.

---

**Egzamina wstępne do klas od II — VII** odbywać się będą 30 i 31 sierpnia tudzież w pierwszych dniach września; **egzamina poprawcze** w dniach 30 i 31 sierpnia.

---

## Warunki przejścia uczniów z gimnazyum do szkoły realnej.

(Rozp. Wys. Rady szk. kr. z dn. 16 maja 1888 t. 2764)

*A*) Uczeń gimnazyalny, ubiegający się o przyjęcie do II, III, IV i V klasy realnej może być uwolniony od egzaminu wstępnego: 1. z religii 2. z języka polskiego, 3. niemieckiego, 4. z historyi powszechnej, 5. history naturalnej i 6. fizyki, jeżeli w świadectwie gimnazyalnem za ostatnie półrocze, poprzedzające bezpośrednio odnośną klasę realną, oprócz ogólnego stopnia dobrego (t. j. celującego albo pierwszego), otrzymał z wymaganego dla tej klasy przedmiotu i odnośnego materyału nauki cenzury przynajmniej „dostatecznie“ bez osłabiającego dodatku. Z reszty przedmiotów t. j. 1. matematyki, 2. chemii, 3. geografi, 4. rysunków i 5. języka francuskiego należy egzamin wstępny odbywać z wszelką ścisłością, by w interesie szkół realnych nie dopuszczać do tych zakładów uczniów nieudolnych.

*B*) Co do uczniów, którzy z gimnazyum tylko wskutek niedostatecznych cenzur z języków klasycznych otrzymali ogólny stopień drugi, zastrzega sobie Rada szkolna krajowa według okoliczności rozstrzygać w poszczególnych wypadkach, czy takiego ucznia przypuścić do egzaminu wstępnego do następnej klasy realnej, przyznając mu zresztą powyżej wskazane ulgi.

---

Rok szkolny rozpocznie się dnia 3. września uroczystem nabożeństwem o godzinie 8 rano.

---

**Opłata szkolna** wynosi 20 złr. za jedno półrocze, w markach szkolnych, które są do nabycia w c. k. urzędzie podatkowym i powinna być złożona w pierwszej połowie października i marca.

Uczniowie, którzy po upływie sześciu tygodni opłaty szkolnej nie uiszczą, tracą prawo uczęszczania do Zakładu.

Ubodzy uczniowie mający dobrą klasę, dobre obyczaje i dobrą pilność uzyskają uwolnienie od opłaty szkolnej, jeśli wniosą do dnia 15. września

względnie do dnia 15 lutego podanie do Wys. c. k. Rady szkolnej krajowej na ręce Dyrekcyi. Do podania należy dołączyć ostatnie świadectwo szkolne i świadectwo ubóstwa.

---

Wszyscy uczniowie obowiązani są zaraz z początkiem roku zaopatrzyć się w **przepisane książki i przybory szkolne**, a to pod groźbą usunięcia z klasy.

Co do przedmiotów nadobowiązkowych, kto się na nie zapisze, nie może przerwać nauki bez zezwolenia Dyrekcyi.

Częste porozumiewanie się rodziców, opiekunów lub dozoru domowego ze szkołą jest rzeczą nader pożądaną i korzystną. Dyrektor i profesorowie udzielają wiadomości o postępie w naukach i zachowaniu się uczniów dwa razy na miesiąc t. j. w każdą niedzielę po 1 i 16 od godziny $\frac{1}{4}$10—$\frac{1}{2}$11 przed południem w kancelaryi Dyrekcyi.

Dyrekcya c. k. Wyższej Szkoły realnej

W Krakowie, dnia 25 czerwca 1895.

*Dr. Hugo Zathey,*
Dyrektor.

# Ważniejsze omyłki druku.

| Str. | wiersz | zamiast | ma być |
|---|---|---|---|
| VIII | 4 z góry | $-y_2$ | $+y_2$ |
| IX | 13 | $\frac{r}{r}-1$ | $\frac{r}{r}=1$ |
| XIV | 13 z dołu | $y' = -y'$; | $y' = -y$; |
| XVIII | 5 z góry | $\frac{KP}{KM} = \cos(xl)$ | $\frac{LP}{KM} = \cos(xl)$ |
| XVIII | 10 z dołu | 12) i 13) | 13) i 14), |
| XIX | 4 z góry | $\frac{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta \mp 1}{\text{cotg}\,\beta \mp \text{cotg}\,\alpha}$ | $\frac{\text{cotg}\,\alpha\,\text{cotg}\,\beta \mp 1}{\text{cotg}\,\beta \pm \text{cotg}\,\alpha}$ |
| XIX | 12 | 12.) i 14.) | 13.) i 15.) |
| XX | 2 | 12), 13), 14) i 15) | 13), 14), 15) i 16) |
| XXI | 1 | $=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}-$ | $=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}-$ |
| „ | 4 | $=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}=$ | $=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}+$ |
| XXII | 10 | trójkąt ABE, | trójkąt ADE, |
| XXIV | 13 z dołu | c. d. 1″ | c. D. 1″ |
| XXVII | 11 z góry | tg(180 −), cotg(180 −) | tg $(180-\alpha)$, cotg $(180-\alpha)$ |
| XXIX | 13 | 0·85991 | 0·86991 |
| XXX | 10 z dołu | $\cos\frac{x-y}{5}$ | $\cos\frac{x-y}{2}$ |
| XXXI | 6 | $\frac{\text{tg}\frac{x+y}{2}}{\text{tg}\frac{x+y}{2}}$ | $\frac{\text{tg}\frac{x+y}{2}}{\text{tg}\frac{x-y}{2}}$ |
| XXXV | 15 (ćw. 10) | $=\frac{x\quad b}{r\sqrt{a^2+b^2}}$ | $=\frac{x}{r}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ |
| XXXVII | 1 (ćw. 23) | $180^0$ | $108^0$ |
| XXXVIII | 7 z dołu (ćw. 32.b) | cos) $-\alpha+b+\gamma$) | cos $(-\alpha+\beta+\gamma)$ |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Str. XL | wiersz 6 z góry | (ćw. 43) | zamiast 43) | ma być 44) |
| „ „ | „ 13 „ | (ćw. 46) | „ $= o$ | „ „ $= c$ |
| „ „ | „ 20 „ | (ćw. 52) | „ $x_2 = 133^0\ 52'\ 48''$) | ma być $x_2 = 133^0\ 52'\ 58''$) |
| „ XLI | „ 16 z dołu | (ćw. 74) | zamiast: $3^{tgx} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ | ma być $3^{tgx} = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$ |
| „ XLII | „ 8 „ | (ćw. 77) | „ 87) | ma być: 77) |
| „ XLIII | „ 17 „ | (ćw. 96) | „ $= 0{\cdot}85$ | „ „ $0{\cdot}84$ |
| „ „ | „ 10 z góry | (ćw. 94) | „ $\frac{\sin x}{\cos x} = a$ | „ „ $\frac{\sin x}{\cos y} = a$ |

